Vectors

μφ ALGEBRA

Conceptualització

En el context de l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es defineix un vector com la resta de les coordenades de dos punts qualsevols del pla. El vector que va des del punt $\mathrm{A}(a_x, a_y, a_z)$ fins al punt $\mathrm{B}(b_x, b_y, b_z)$ és:

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \mathrm{B} - \mathrm{A} = (b_x, b_y, b_z) - (a_x, a_y, a_z) = (b_x - a_x, b_y - a_y, b_z - a_z)$$

Tot vector $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ té associats un mòdul $|\vec{v}|$ i una direcció marcada pels angles polar θ i azimutal φ:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad \natural \quad \theta = \arctan\left(\sqrt{v_x^2+v_y^2}/v_z\right) \quad \natural \quad \varphi = \arctan\left(v_y/v_x\right)$$

Aritmètica

SUMA: la suma de vectors és la suma de les seves components i dóna com a resultat un altre vector:

$$\vec{\omega} = \vec{v} + \vec{u} = (v_x + u_x, v_y + u_y, v_z + u_z)$$

REESCALAT: el producte d'un nombre per un vector és un altre vector de la mateixa direcció que l'original però amb un mòdul i/o sentit diferents:

$$\vec{u} = \lambda\vec{v} = \lambda \cdot (v_x, v_y, v_z) = (\lambda v_x, \lambda v_y, \lambda v_z)$$

$$\begin{array}{lcc} |\vec{u}| \geq |\vec{v}| \wedge \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} & \Longrightarrow & \lambda \geq 1 \\ |\vec{u}| < |\vec{v}| \wedge \vec{u} \uparrow\uparrow \vec{v} & \Longrightarrow & 0 < \lambda < 1 \\ |\vec{u}| < |\vec{v}| \wedge \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} & \Longrightarrow & -1 < \lambda < 0 \\ |\vec{u}| \geq |\vec{v}| \wedge \vec{u} \uparrow\downarrow \vec{v} & \Longrightarrow & \lambda \leq -1 \end{array}$$

Producte Escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Del producte escalar entre dos vectors en resulta un nombre i es pot calcular de dues maneres:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \begin{cases} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z \\ = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \end{cases}$$

on α és l'angle entre els dos vectors.
De combinar les dues formes del producte escalar en surt una manera de calcular l'angle que formen dos vectors entre si...

$$\alpha = \arccos\left(\frac{u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

Independència Lineal i Base d'un Espai Vectorial

En general, qualsevol vector de l'espai es pot construir com una combinació lineal de 3 vectors:

$$\vec{a} = \beta\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega} \qquad \beta, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

i direm que β, μ i ν són les components del vector $\vec{a}$ en els tres eixos generats respectivament per $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$. Per assegurar que els tres vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ són, efectivament, linealment independents, s'ha de complir que:

$$\beta\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega} = \vec{0} \Longrightarrow \beta = \mu = \nu = 0$$

En aquest cas, direm que els 3 vectors $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ **formen base** i poden generar l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$. Quan un dels vectors resideixi al pla generat pels altres 2, només podran generar l'espai bidimensional $\mathbb{R}^2$ i si els 3 fossin paral·lels generarien la recta unidimensional $\mathbb{R}$.

$$\beta\vec{u} + \mu\vec{v} + \nu\vec{\omega} = \vec{0} \Longrightarrow \beta = \mu = \nu = 0 \Leftrightarrow \mathrm{B} : \langle\vec{u}\vec{v}\vec{\omega}\rangle = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow \vec{a}_{\mathrm{B}} = (\beta, \mu, \nu)$$

Producte Vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$

Donats dos vectors que formen entre si un angle α, del seu producte vectorial en resulta un tercer vector perpendicular al pla definit pels dos vectors originals. El seu sentit es determina amb la regla del tirabuixó. Les seves components i el seu mòdul es determinen respectivament amb els càlculs:

$$\vec{\omega} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad \natural \quad |\vec{\omega}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\alpha$$

Producte Mixt $[\vec{\omega}, \vec{u}, \vec{v}]$

Donats tres vectors desalineats que formin les arestes d'un prisma oblic imaginari, del seu producte mixt en resulta un nombre que és el volum del paral·lelepípede que formen:

$$[\vec{\omega}, \vec{u}, \vec{v}] \equiv \vec{\omega} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

$$[\vec{\omega}, \vec{u}, \vec{v}] \neq 0 \Leftrightarrow \langle\vec{u}\vec{v}\vec{\omega}\rangle = \mathbb{R}^3$$