Estudi de Sistemes d'Equacions Lineals

ALGEBRA

Conceptualització

Un sistema d'equacions lineals és un conjunt de m equacions algebraiques que realcionen n incògnites o variables i que poden contenir un nombre arbitrari de paràmetres lliures. En general sempre podrem expressar el sistema d'equacions en forma matricial per aprofitar tota la maquinària de matrius i determinants en el seu estudi i resolució. Considerem un conjunt de n incògnites $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lligades amb el següent sistema d'equacions:

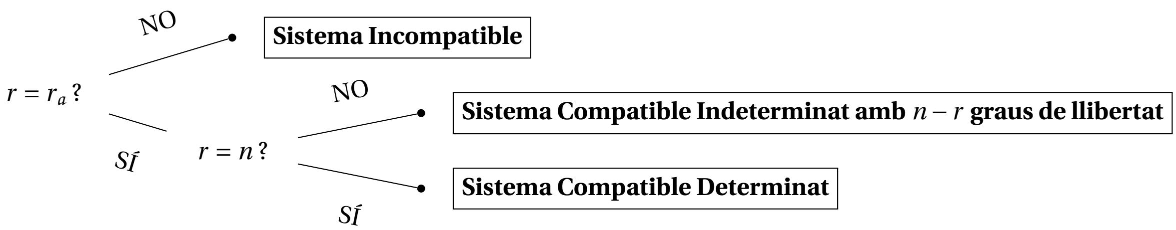
$$\left.\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Anomenem **Matriu del Sistema** $\mathcal{S}$ la matriu formada pels coeficients que multipliquen les incògnites en les equacions del sistema.
Anomenem **Matriu Ampliada o Extesa** $\mathcal{A}$ la matriu formada per la matriu del sistema a la qual se li afageix la columna dels termes independents.

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \natural \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Àrbre de Caracterització del Sistema

Considerem un sistema d'm equacions amb n incògnites. Siguin $\mathcal{S}$ la matriu del sistema, $\mathcal{A}$ la matriu ampliada i r i r_a els seus rangs respectius. Aleshores l'estudi del sistema s'efectua amb el següent algoritme:



- INCOMPATIBLE: El sistema és irresoluble. No existeix cap conjunt de solucions que compleixin simultàniament totes les n equacions
- COMPATIBLE INDETERMINAT: El sistema té infinites solucions. Existirà un conjunt de $n - r$ incògnites que esdevindran lliures de valer qualsevol valor real $\in (-\infty, +\infty)$ i les r incògnites restants quedaran fixades en funció de les anteriors
- COMPATIBLE DETERMINAT: El sistema és resoluble amb un conjunt de n solucions úniques, una per a cadascuna de les n incògnites

Regla de Cramer per a la resolució de Sistemes Compatibles Determinats

Donat un sistema compatible determinat d'n equacions amb n incògnites, siguin $\mathcal{S}$ la matriu del sistema i $\det(\mathcal{S})$ el valor del seu determinant. Aleshores les solucions del sistema són:

$$\{x_i\} = \frac{1}{\det(\mathcal{S})} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \underbrace{b_m}_{\text{i-èssima columna}} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad \forall 1 < i < n$$

on s'ha intercanviat la i-èssima columna dels coeficients en la matriu $\mathcal{S}$ per la columna dels termes independents.

Estudi de Sistemes d'Equacions Lineals

μφ ALGEBRA

Mètode de Gauβ per a la resolució de Sistemes

El mètode de Gauss és una generalització del mètode clàssic de reducció. Es fonamenta en les propietats de determinants que especifiquen que el sistema d'equacions roman inalterat quan una de les equacions es substitueix per una combinació lineal de les altres. Presentem la operativa del mètode a través del següent exemple:

$$\begin{array}{rr} e_1: & x+y-z=1 \\ e_2: & 3x+2y+z=1 \\ e_3: & 5x+3y+4z=2 \end{array}\Bigg\} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_3-5e_1]{e_2-3e_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 9 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[e_3-2e_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

Veiem doncs que hem transformat el sistema fins triangular-lo en una equació per z, una per y i z i una per les tres:

$$\begin{array}{rr} e_1': & x+y-z=1 \\ e_2': & -y+4z=-2 \\ e_3': & z=1 \end{array}\Bigg\} \xrightarrow{e_3' \mapsto e_2'} -y+4(1)=-2 \Longrightarrow y=6 \xrightarrow{e_3',e_2' \mapsto e_1'} x+(6)-(1)=1 \Longrightarrow x=-4 \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} x=-4 \\ y=6 \\ z=1 \end{array}}$$

Cas Pràctic

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 3 \\ x-y+z & = & 2 \\ 3x-y+az & = & b \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{pmatrix} \quad ♮ \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & a & b \end{pmatrix}$$

$$\det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & a \end{vmatrix} = 1+a \to 1+a=0 \Longrightarrow a=-1$$

Cerquem si hi ha algun valor de b que faci que la matriu ampliada tingui algun menor d'ordre 3 diferent de zero i, efectivament, el determinant d'ordre 3 que resta d'eliminar la tercera columna de la matriu ampliada ens dóna la condició cercada...

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = 4-b \to 4-b=0 \Longrightarrow b=4$$

Tenint en compte que el nombre de incògnites és $n=3$, ja tenim tota la informació necessària per la discussió del sistema:

Þ $a \neq -1 \Longrightarrow r(\mathcal{S}) = r(\mathcal{A}) = 3 = n \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinat

Þ $a=-1 \wedge b \neq 4 \Longrightarrow r(\mathcal{S}) = 2 \neq 3 = r(\mathcal{A}) \Longrightarrow$ Sistema Incompatible

Þ $a=-1 \wedge b=4 \Longrightarrow r(\mathcal{S}) = r(\mathcal{A}) = 2 = n-1 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Indeterminat amb 1 grau de Llibertat

Un cop fet l'estudi resolem el sistema per als casos que sigui possible:

Þ Per al cas $a \neq -1$ resolem el sistema compatible determinat usant la regla de Cramer...

$$x = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ b & -1 & a \end{vmatrix} = \frac{1-a}{1+a} \quad ♮ \quad y = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & b & a \end{vmatrix} = \frac{3+a-b}{1+a} \quad ♮ \quad z = \frac{1}{|\mathcal{S}|} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & b \end{vmatrix} = \frac{4-b}{1+a}$$

Així, la solució única del sistema és $\boxed{(x,y,z) = \left(\frac{1-a}{1+a}, \frac{3+a-b}{1+a}, \frac{4-b}{1+a}\right)}$ $\quad \forall a,b \in \mathbb{R} \wedge a \neq -1$

Þ Per al cas $a=-1 \wedge b=4$ resolem el sistema indeterminat usant, per exemple, el mètode de Gauss...

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ 3x-y-z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{III}'=\mathrm{III}-\mathrm{II}} \left.\begin{array}{r} 2x-y+z=3 \\ x-y+z=2 \\ 2x-2z=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{\mathrm{III}'} 2x-2z=2 \Longrightarrow x=1+z \xrightarrow{\mathrm{II}} (1+z)-y+z=2 \Longrightarrow y=2z-1$$

Així, el conjunt d'infinites solucions és $\boxed{(x,y,z) = (z+1, 2z-1, z)}$ $\quad \forall z \in \mathbb{R}$