Relativitat Especial

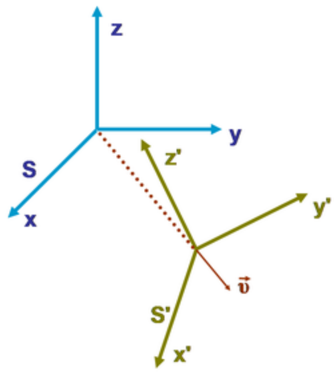
μφ MECANICA

La Crisi de la Física Clàssica

A finals del segle XIX, Maxwell ja havia completat la teoria de camps electromagnètics i amb ella havia descrit la natura íntima de la llum [(1)]. En aquell temps, s'assumia que la llum es transmetia en el buit a través d'una substància coneguda com èter i es creia que la velocitat d'un raig de llum havia de dependre del sistema de referència des del qual es mesurés. De la mateixa manera que si ens movem a velocitat constant i ens creuem amb un mòbil que s'acosta a nosaltres li mesurem una velocitat aparent superior a la que té realment –degut al moviment relatiu entre els dos–, s'esperava que la llum es sotmetés a la mateixa *relativitat* en la seva velocitat. Contràriament a l'esperat, el famós experiment de Michaelson i Morley va establir un resultat experimental irrefutable: la velocitat de la llum era la mateixa mesurada desde qualsevol sistema de referència, estigués o no en repòs. Les lleis de la física pre-clàssica newtoniana no tenien explicació per a tal fenomen. Aviat va quedar clar que hi havia d'haver alguna cosa en la propia estructura de l'espai i el temps que permetés l'existència d'una velocitat constant per a la llum. Amb els treballs iniciats per Hendrick Lorentz i Henri Poincaré i culminats per Albert Einstein es va construir el marc teòric del que acabaria convertint-se en la primera revolució de la física moderna, la **Teoria de la Relativitat Especial**.

Transformacions de Galileo

En el límit pre-clàssic, les **lleis del moviment relatiu establertes per Galileo** són les lleis matemàtiques que relacionen les mesures fetes des d'un sistema de referència en repòs $\mathcal{S}$ i les fetes des d'un sistema de referència inercial $\mathcal{S}'$, un sistema que es desplaça a velocitat constant $\vec{v}$ respecte el sistema en repòs:



$$\begin{array}{ll} \text{(I)} & \vec{r}' = \vec{r} - \vec{v}t \\ \text{(II)} & \vec{\mathrm{v}}' = \vec{\mathrm{v}} - \vec{v} \\ \text{(III)} & \vec{a}' = \vec{a} \\ \text{(IV)} & t' = t \end{array}$$

La primera equació estableix una relació entre les coordenades de posició que ocupa un objecte en l'espai segons el sistema de referència en moviment $\mathcal{S}'$ i el sistema en repòs $\mathcal{S}$. Aquestes posicions, lògicament, seran diferents per un i altre sistema ja que un sistema es desplaça respecte l'altre.

La quarta equació estableix que el ritme amb què avança el temps és independent del sistema de referència, el temps flueix per igual a tot arreu de manera que dos rellotges, un en repòs i l'altre en moviment, marcaran el pas del temps de forma simultània. És a partir de les transformacions de Galileo que se'n dedueixen dues propietats que avui dia sabem que són falses!

- **L'Invariant de Longitud**: $\Delta\vec{r}' = \Delta\vec{r}$
  Tant si es mesura des d'un sistema de referència en repòs com si es mesura des d'un sistema de referència inercial, tot i que les posicions absolutes que ocupi un objecte siguin diferents, el tamany d'aquest és el mateix per als dos sistemes. Equivalentment, la distància entre dos punts també és invariant.

- **L'Invariant de Temps**: $\Delta t' = \Delta t$
  Com que el temps transcorre al mateix ritme en tot l'Univers, la duració d'un interval de temps és la mateixa en un sistema de referència en repòs o en un sistema de referència inercial

Postulats de la Relativitat Especial

1er Postulat Totes les lleis de la física es compleixen per igual en tots els sistemes de referència inercials

2on Postulat La velocitat de la llum en el buit és la mateixa per a tots els sistemes de referència inercials i és independent del moviment relatiu entre la font emissora i l'observador

El segon postulat de la Teoria de la Relativitat Especial és la llavor d'una transformació radical en la manera en què s'entenia el món. Fins aleshores, sempre s'havia pensat en l'espai com una regió tridimensional on hi vivien objectes que patien canvis. El temps era la dimensió que seqüenciava aquests canvis de manera que els objectes es movien al llarg de *posicions* diferents en *unitats de temps* diferents. Per tal que la velocitat de la llum fós un invariant universal, es requeria que l'espai i el temps estiguessin entrellaçats formant un teixit de 4 dimensions anomenat Continu Espai-Temps. De veure el món com una seqüència ordenada de fotografies de l'espai de 3 dimensions, es va passar a veure el món com un únic hiperespai de 4 dimensions amb una mètrica no euclídea i assimètrica entre la dimensió temporal i les tres espaials restants

$$\text{espai tridimensional euclidi que canvia amb el temps } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}^4 \text{ espai de Minkowski tetradimensional}$$

[(1)] veure apèndix de la teoria de la llum de Maxwell

Relativitat Especial

MECANICA

La Dilatació del Temps

En Relativitat Especial l'interval de temps transcorregut entre 2 esdeveniments sempre és més gran quan es mesura des d'un sistema de referència en repòs que quan es mesura des d'un sistema de referència en moviment. Aquest fenomen es coneix com la **dilatació del temps**. El ritme amb què avança el temps per un mòbil quan es mou a una certa velocitat s'alenteix i ho fa més com més s'apropa a la velocitat de la llum

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

La Contracció de l'Espai

En Relativitat Especial la longitud d'un objecte o la distància mesurada entre dos punts sempre és més gran quan es mesura des d'un sistema de referència en repòs que quan es mesura des d'un sistema de referència en moviment. Aquest fenomen es coneix com la **contracció de l'espai**. Des del punt de vista de l'observador que està en moviment les distàncies es fan més petites en la seva direcció de moviment i ho fan més com més s'apropi a la velocitat de la llum.

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{L}'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Transformacions de Lorentz

En el context de la relativitat especial definim els paràmetres β i γ que mesuren la *necessitat* d'abandonar el tractament newtonià d'un problema per abordar-lo amb la maquinària de relativitat. Per velocitats molt més petites que la velocitat de la llum ($v \ll c$) el paràmetre β s'aproxima a 0 i γ a 1 i el problema es pot tractar amb la mecànica newtoniana pre-clàssica. Com més alta és la velocitat ($v \to c$) β tendeix a 1 i γ a ∞ i es fa necessari tractar el problema en el marc de la mecànica relativista. Considerem un objecte que es mou en una certa direcció amb un sistema de referència inercial $\mathcal{S}'$ propi i comòbil a l'objecte. Construim un sistema de referència en repòs $\mathcal{S}$ de manera que l'objecte mòbil es desplaci al llarg de l'eix x de $\mathcal{S}$. Aleshores les transformacions del moviment relatiu són:

Transformacions de Galileo $v \ll c \implies \beta \to 0 \;\natural\; \gamma \to 1$				
$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$	$\mathrm{v}'_x = \mathrm{v}_x - v$	$\mathrm{v}'_y = \mathrm{v}_y$	$\mathrm{v}'_z = \mathrm{v}_z$	$t' = t$
Transformacions de Lorentz $v \lessapprox c \implies \beta \to 1 \;\natural\; \gamma \to \infty$				
$\vec{r}\,' = \gamma\left(\vec{r} - \vec{v}t\right)$	$\mathrm{v}'_x = \dfrac{\mathrm{v}_x - v}{1-\frac{v}{c^2}\mathrm{v}_x}$	$\mathrm{v}'_y = \dfrac{\mathrm{v}_y}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\mathrm{v}_x\right)}$	$\mathrm{v}'_z = \dfrac{\mathrm{v}_z}{\gamma\left(1-\frac{v}{c^2}\mathrm{v}_x\right)}$	$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$

$$\beta = \frac{v}{c}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

L'Energia en el marc de la Relativitat Especial

La famosa relació d'equivalència entre massa i energia d'Einstein estableix que:

$$\mathrm{E} = mc^2 \quad \text{on} \quad m \equiv \gamma \cdot m_o$$

m és la massa relativista d'un objecte que es mou a una velocitat v i que té massa m_o quan es troba en repòs. A mida que la velocitat de l'objecte s'acosta a la velocitat de la llum, el factor γ divergeix i la massa relativista es fa arbitràriament gran i cada vegada li costa més accelerar. En el límit en que $v \to c$ la massa relativista es fa infinita i a l'objecte se li fa impossible arribar a la velocitat de la llum. Només els objectes de massa zero (fotons, gluons, gravitons...) se'ls permet viatjar a la velocitat de la llum. En el límit pre-clàssic en què la velocitat de l'objecte sigui molt més petita que la velocitat de la llum ($v \ll c$) es pot desplegar la funció $\gamma(v)$ en termes potencialment decreixents:

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{v^2}{c^2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{v^4}{2c^4}\right) + \cdots = 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(4)$$

on el terme $\mathcal{O}(4)$ agrupa una sèrie infinita de sumands que representen correccions de 2on ordre doncs inclouen potències cada vegada més grans de v/c que es fan ràpidament zero si es garanteix que $v \ll c$. Així:

$$\mathrm{E} = mc^2 = \gamma m_o c^2 = \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \mathcal{O}(4)\right)\cdot m_o c^2 = m_o c^2 + \frac{v^2}{2\cancel{c^2}}\cdot m_o \cancel{c^2} + \mathcal{O}(4) \approx m_o c^2 + \tfrac{1}{2} m_o v^2 = \mathrm{E}_o + \mathrm{E}_c$$