POLINOMIS

Conceptualització

Anomenem **monomi** d'ordre p a l'expressió algebraica $a \cdot x^p$ amb $a \in \mathbb{R}$
Anomenem **polinomi** a una combinació d'un nombre arbitrari de monomis:

$$\mathrm{P}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

Els coeficients del polinomi són el conjunt de nombres reals que multipliquen les diverses potències de x a cada monomi: $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$
Anomenem **terme independent** al monomi a_0 que no multiplica a cap x (ho fa de fet a la potència 0).
Anomenem **grau del polinomi** al valor n de l'exponent més gran de les potències d'x

Aritmètica entre Polinomis

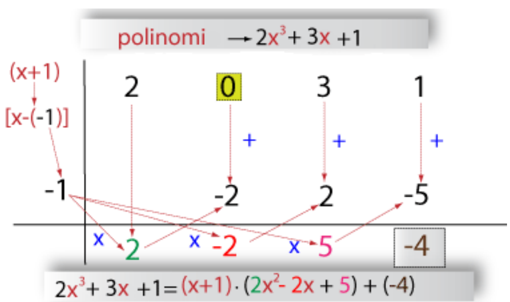
Totes les operacions entre polinomis es basen en les lleis de potències definides al formulari d'Aritmètica

- SUMA: $\mathrm{P}(x) \pm \mathrm{Q}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \pm \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i) x^i + \sum_{j=n+1}^{m} b_j x^j$ amb $m \geq n$
- PRODUCTE: $\mathrm{P}(x) \cdot \mathrm{Q}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j}$
- DIVISIÓ: l'algoritme de divisió entre polinomis consta de les següents etapes:
  1. Dividir el monomi de més grau del dividend entre el monomi de més grau del divisor
  2. Col·locar el resultat al lloc del quocient i multiplicar-lo per tots els monomis del divisor
  3. Col·locar el resultat del pas 2 sota el dividend canviant els signes ($+ \Leftrightarrow -$)
  4. Sumar el dividend amb el polinomi escrit al pas 3
  5. Pensar el resultat del pas 4 com un nou dividend i tornar a començar pel pas 1
  6. Repetir els passos 1-5 fins que el grau del polinomi del pas 5 sigui de grau inferior al grau del divisor, moment en el qual se'l considera el residu de la divisió i s'atura l'algoritme

Regla de Ruffini

La **Regla de Ruffini** és un algoritme visual per a dividir polinomis quan el divisor pren la forma $(x - a)$ anomenada divisor de ruffini. A títol d'exemple, es presenta a la figura d'abaix la operativa de la regla:

$$\mathrm{D}(x) = 2x^3 + 3x + 1$$
$$d(x) = x + 1$$
$$q(x) = 2x^2 - 2x + 5$$
$$\mathrm{R} = -4$$



Teorema del Residu

Entre els 4 polinomis d'una divisió: el dividend $\mathrm{D}(x)$, el divisor $d(x)$, el quocient $q(x)$ i el residu de la divisió $r(x)$, s'estableix la relació

$$\mathrm{D}(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

Quan el divisor és un divisor de ruffini i el residu, per tant, un nombre real R (el grau del dividend només es reduïrà en una unitat i la resta serà un nombre), aleshores la relació anterior esdevé

$$\mathrm{D}(x) = (x - a) \cdot q(x) + \mathrm{R}$$

Quan avaluem aquesta expressió en $x = a$

$$\mathrm{D}(a) = \underbrace{(a - a)}_{=0} \cdot q(x) + \mathrm{R} \Longrightarrow \boxed{\mathrm{D}(a) = \mathrm{R}}$$

Aquest resultat ens permet saber *a priori* la resta d'una divisió sense haver de fer-la, ens dóna, en particular, un mètode per predir divisions exactes

POLINOMIS

ALGEBRA

Generalitzacions i Aplicacions dels Polinomis

Polinomis de Laurent

Els polinomis, tal i com els hem definit, poden ser generalitzats per incloure termes més sofisticats. Quan els exponents de les potències d'x d'un polinomi no es limiten a ser naturals sino que s'inclou la possibilitat que puguin ser qualsevol enter, aleshores estarem construint els anomenats **Polinomis de Laurent** que inclouen termes amb x's elevades a potències negatives:

$$\mathrm{L}(x)=\sum_{i=-m}^{n} a_i x^i =$$

$$= a_{-m}x^{-m}+a_{-m+1}x^{-m+1}+\ldots+a_{-2}x^{-2}+a_{-1}x^{-1}+a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n =$$

$$\mathrm{L}(x)=\frac{a_{-m}}{x^m}+\frac{a_{-m+1}}{x^{m-1}}+\ldots+\frac{a_{-2}}{x^2}+\frac{a_{-1}}{x}+a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n$$

Polinomi Caracterśtic, Valors Propis i Diagonalització de Matrius

El procés de diagonalització de matrius és un mètode de gran utilitat en varies àrees. Per exemple, serveix per calcular de forma eficient potències múltiples de matrius. També, en mecànica quàntica, és un dels processos numèrics més emprats en la resolució de l'equació de Schrödinger en un espai de dimensió infinita com l'espai de Hilbert. El procés funciona així:
Considerem la matriu

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}$$

Contruïm ara el seu polinomi característic que es defineix com: $p(\lambda)=\det(\mathrm{A}-\lambda\mathbb{1})$

$$\mathrm{A}-\lambda\mathbb{1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\lambda&2&0\\0&3-\lambda&0\\2&-4&2-\lambda\end{pmatrix}\Longrightarrow p(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\0&3-\lambda&0\\2&-4&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)$$

Igualem el polinomi característic a zero per trobar les seves arrels o valors propis

$$p(\lambda)=0\Longrightarrow(1-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(2-\lambda)=0\Longrightarrow\lambda=\{1,3,2\}$$

Ara que hem trobat els valors propis cercarem les components dels 3 vectors propis, un per cada valor propi:

$$\mathrm{A}\cdot\vec{v}_1=\lambda_1\vec{v}_1\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Longrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=x\\3y=y\\2x-4y+2z=z\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{c}x=x\\y=0\\z=-2x\end{array}\Longrightarrow\vec{v}_1=(-1,0,2)$$

$$\mathrm{A}\cdot\vec{v}_2=\lambda_2\vec{v}_2\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Longrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=3x\\3y=3y\\2x-4y+2z=3z\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{c}x=1\\y=1\\z=-2\end{array}\Longrightarrow\vec{v}_2=(1,1,-2)$$

$$\mathrm{A}\cdot\vec{v}_3=\lambda_3\vec{v}_3\Longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Longrightarrow\left.\begin{array}{r}x+2y=2x\\3y=2y\\2x-4y+2z=2z\end{array}\right\}\Longrightarrow\begin{array}{c}x=0\\y=0\\z=1\end{array}\Longrightarrow\vec{v}_3=(0,0,1)$$

Ara, sigui P la matriu que té com a columnes els vectors propis trobats, aleshores $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ serà una matriu diagonal:

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\mathrm{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\2&-2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&3&0\\2&-4&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Així, hem trobat que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ és una matriu diagonal D i podem, per exemple, calcular:

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}=\mathrm{D}\Longrightarrow\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}\Longrightarrow\mathrm{A}^k=\left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)^k=\mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$$

que es pot calcular molt més ràpidament que una potència d'una matriu no diagonal. . .