MECÀNICA PRE-CLÀSSICA

Conceptualització

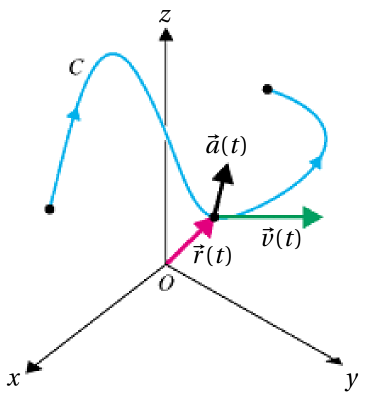
Ben entrat el segle XX, la consolidació de les teories de la Relativitat i la Mecànica Quàntica van canviar la manera amb què la física entenia el món i la manera amb què es tractaven matemàticament els models físics de la realitat. Tot i així, la física desenvolupada desde Galileu fins a mitjans del segle XIX segueix tant vigent com el primer dia i es segueix emprant avui dia en pràcticament tots els àmbits habituals de l'escala humana. Només en algunes condicions particulars la física anterior al segle XX es queda coixa per tractar la realitat i es fa necessari recórrer a la física moderna:

- per poder descriure la realitat des de l'escala sub-atòmica fins a l'escala nanoscòpica és necessari emprar la maquinària matemàtica de la **Mecànica Quàntica**
- per abordar problemes on els objectes d'estudi es desplacin a velocitats properes a les de la llum i/o en el si de camps gravitatoris molt intensos és necessari emprar la maquinària matemàtica de la *Relativitat Especial* i/o la *Relativitat General*, que s'engloben sovint sota el nom de **Mecànica Clàssica Relativista**
- quan es combinen les dos condicions anteriors, com en l'estudi de forats negres o de l'origen de l'Univers, es necessitaria emprar la maquinària matemàtica de teories que ni tan sols estan acabades com la *Gravitació Quàntica* o la *Teoria de Cordes*

Fora d'aquests entorns extrems, la Física pre-segle XX, o **Mecànica pre-Clàssica**, és una aproximació prou acurada de la realitat que no podem oblidar que ens ha donat èxits sense precedents a la història de l'espècie humana. Amb física molt poc més sofisticada que la establerta per Newton es va industrialitzar el món, hem omplert la societat de tecnologies i comoditats inacabables, hem trepitjat la Lluna, hem omplert el cel de satèl·lits artificials, etc.
...i totes aquestes conquestes científiques i tecnològiques van començar amb el simple estudi del *moviment*...

Nomenclatura i Definicions Bàsiques

MECÀNICA	
CINEMÀTICA	DINÀMICA
com és el moviment	*què causa* el moviment



- **Sistema de Referència**: Conjunt d'eixos cartesians en una, dos o tres dimensions que caracteritzen l'espai amb coordenades
- **Mòbil**: Objecte que es desplaça en l'espai i en el temps
- **Trajectòria**: Locus de punts coordenats per un sistema de referència que ressegueix un mòbil en el seu desplaçament
- **Força Total $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{T}}$**: Conjunt combinat de forces que actuen sobre el mòbil. La força total és l'agent motor responsable d'iniciar el moviment del mòbil i d'alterar la seva trajectòria
- $\vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t})$: Vector posició que determina en qualsevol instant de temps on es troba el mòbil
- $\vec{\mathbf{v}}(\mathbf{t})$: Vector velocitat que determina en qualsevol instant de temps la taxa de canvi de la posició del mòbil
- $\vec{\mathbf{a}}(\mathbf{t})$: Vector acceleració que determina en qualsevol instant de temps la taxa de canvi de la velocitat del mòbil
- $\vec{\mathbf{p}}$: Vector moment lineal del mòvil que mesura la seva inèrcia combinant massa i velocitat: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
- $\vec{\mathbf{L}}$: Vector moment angular del mòvil que mesura la seva inèrcia rotatòria: $\vec{\mathrm{L}} = \vec{p} \times \vec{r}$
- $\vec{\mathbf{M}}$: Vector moment d'una força que mesura l'impuls rotatori que produeix una força: $\vec{\mathrm{M}} = \vec{\mathrm{F}} \times \vec{r}$

RELACIONS ENTRE LES	**Forma Diferencial**	$\vec{r}(t)$	$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{dt}}$	$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{dt}^2}$
MAGNITUDS CINEMÀTIQUES	**Forma Integral**	$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,\mathrm{dt}$	$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\,\mathrm{dt}$	$\vec{a}(t)$

MECÀNICA PRE-CLÀSSICA

μφ MECANICA

Lleis de Newton

1. Quan la suma de totes les forces que actuen sobre un mòbil és nul·la, aquest manté el seu estat de moviment
2. La Força Total que actua sobre un mòbil és responsable de la variació temporal del seu moment lineal
3. Quan un agent fa una força sobre un mòbil, aquest respon aplicant una força de reacció sobre l'agent amb la mateixa intensitat i direcció però sentit oposat

Més enllà de l'enunciat formal de les tres lleis de Newton, les seves conseqüències immediates són...

1. Quan $\vec{F}_T = 0$, si el mòbil era en repòs, seguirà en repòs, si el mòbil viatjava a velocitat $\vec{v}$ en el moment que s'anul·lin les forces, seguira un moviment rectilini uniforme amb velocitat $\vec{v}$
2. $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = \frac{d\cancel{m}}{\cancel{dt}} \cdot \vec{v} + m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \boxed{\vec{F}_T = m \cdot \vec{a}}$
   La relació força igual a massa per acceleració només és vàlida per a problemes on la massa és constant amb el temps. Per problemes amb massa variable s'ha d'usar la forma completa
3. Sigui $\vec{F}_{ij}$ la força que fa el cos i contra el cos j, aleshores el cos j fa una força de reacció $\vec{F}_{ji}$ contra el cos i
   forca de reacció $\longrightarrow \boxed{\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}} \longleftarrow$ *forca original*

CINEMÀTICA: Tipus de Moviments segons l'Acceleració que actua sobre el Mòbil

Anomenem **acceleració tangencial** $\vec{a}_t$ a la component de l'acceleració responsable d'alterar el mòdul de la velocitat —el mòbil *accelera* o es *frena* si l'acceleració tangencial és positiva o negativa—
Anomenem **acceleració normal** $\vec{a}_n$ a la component de l'acceleració responsable d'alterar la direcció del vector velocitat —la presència d'acceleració normal corba la trajectòria de la partícula—

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v(t) \cdot \hat{v}(t)) = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \hat{v}(t) + v(t) \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt} \equiv \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

	$a_t = 0$	$a_t \neq 0$
$a_n = 0$	M.R.U.	M.R.U.A. $(a_t(t) = cnt.)$ M.V.H.S. $\left(a_t(t) = -\varpi^2 \cdot x(t)\right)$
$a_n \neq 0$	M.C.U.	M.C.U.A. $\left(a_n = v^2/r\right)$

MOVIMENT	ACCELERACIÓ	VELOCITAT	POSICIÓ
M.R.U.	**Moviment Rectilini Uniforme**		
	$\vec{a}(t) = 0$	$v(t) = v_o$	$x(t) = x_o + v_o \cdot t$
M.R.U.A.	**Moviment Rectilini Uniformement Accelerat**		
	$a(t) = a$	$v(t) = v_o + a \cdot t$	$x(t) = x_o + v_o \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$
M.V.H.S.	**Moviment Vibratori Harmònic Simple**		
	$a(t) = -A\varpi^2 \sin(\varpi \cdot t + \varphi_o)$	$v(t) = A\varpi \cos(\varpi \cdot t + \varphi_o)$	$x(t) = A \sin(\varpi \cdot t + \varphi_o)$
M.C.U. (*)	**Moviment Circular Uniforme** $v = \omega \cdot r \;\natural\; s = \theta \cdot r$		
	$a_n(t) = \frac{v^2}{r}$	$\omega(t) = \omega_o$ (**)	$\theta(t) = \theta_o + \omega_o \cdot t$
M.C.U.A. (*)	**Moviment Circular Uniformement Accelerat**		
	$a_n(t) = \frac{[v(t)]^2}{r} \;\natural\; a_t(t) = \alpha$	$\omega(t) = \omega_o + \alpha \cdot t$	$\theta(t) = \theta_o + \omega_o \cdot t + \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2$
Compost	**Tir Parabòlic** (MRU en abcises + MRUA en ordenades)		
	$a_x = 0$	$v_x(t) = v_{ox}$	$x(t) = x_o + v_{ox} \cdot t$
	$a_y = a$	$v_y(t) = v_{oy} + a \cdot t$	$y(t) = y_o + v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

(*) on aparegui la quantitat r, aquesta fa referència al radi de gir

(**) no comfondre entre la *velocitat* angular ω del M.C. i la *freqüència* angular ϖ del M.V.H.S.

MECÀNICA PRE-CLÀSSICA

$\mu\varphi$ MECANICA

DINÀMICA: Forces

Principals Tipus de Forces

FORÇA	SÍMBOL	FORMA	DESCRIPCIÓ
Pes	P	$m \cdot g$	Força dirigida cap al centre de la Terra amb què la gravetat terrestre a nivell del mar, definida com g, atrau a una massa m
Normal	N		Força de reacció que fa una superfície sobre un cos quan aquest aplica una força contra la superfície.
de Fricció	F_f	$\mu \cdot N$	Força proporcional a la velocitat i amb el sentit oposat al sentit d'aquesta. El coeficient de fricció μ serà diferent per a fricció estàtica i per a fricció dinàmica
Elàstica	F_k	$-k \cdot x$	Força recuperadora d'una molla que s'oposa al desplaçament i es fa més intensa com més ens apartem del punt d'equilibri
Gravitatòria	F_g	$m \cdot G(r)$	Força d'atracció gravitatòria que experimenta una massa m en el si d'un camp gravitatori $G(r)$. La força pes és, de fet, una aproximació particular d'aquesta força
Electrostàtica	F_e	$q \cdot E(r)$	Força d'atracció o repulsió elèctrica que experimenta una càrrega q en el si d'un camp elèctric $E(r)$
Magnètica	F_m	$q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$	Força centrípeta magnètica que experimenta una càrrega q que viatja a velocitat v en el si d'un camp magnètic B

DINÀMICA: Treball i Camps Conservatius de Forces

Una força $\vec{F}$ que actui sobre un mòbil indueix el moviment d'aquest al llarg d'una trajectòria C parametritzada per un vector posició $\vec{r}$. Direm que la força ha efectuat un **Treball** W al llarg del desplaçament del mòbil que és igual a

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

A partir d'aquesta definició general, es poden classificar les forces en dos tipus:

- **Forces No Conservatives**: Són aquelles forces el treball realitzat per les quals depen de la trajectòria concreta C que ressegueixi el mòbil. Són forces no conservatives les forces de fregament i la força magnètica.

- **Forces Conservatives**: Són aquelles forces el treball realitzat per les quals no depen de la trajectòria concreta C que ressegueixi el mòbil, sino tant sols de les posicions final i inicial de la trajectòria. Són forces conservatives les forces gravitatòria, elèctrica i elàstica. Les forces conservatives compleixen 3 propietats purament matemàtiques que tindran un profund impacte físic:

  - $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$ [1] El rotacional d'un camp de forces conservatives és nul
  - $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$ El treball realitzat al llarg d'una trajectòria tancada és nul
  - $\vec{F} = -\vec{\nabla} U$ [1] Un camp de forces conservatives es pot escriure com el gradent d'una funció U que anomenem **energia potencial** de manera que la força es dirigeix cap a valors decreixents de l'energia potencial (pel signe negatiu davant de l'operador $\vec{\nabla}$). Tot mòbil es desplaçarà espontàniament cap a les posicions on disminueixi la seva energia potencial U. Els principals tipus d'Energies Potencials són

GRAVITATÒRIA	GRAVITATÒRIA	ELÈCTRICA	ELÀSTICA
$U_g = m \cdot V_g(r)$	$U_g = m \cdot g \cdot h$	$U_e = q \cdot V_e(r)$	$U_k = \frac{1}{2} k x^2$
	(aproximació de baixes altures)		

[1] veure l'apèndix de càlcul vectorial per a una descripció de l'operador $\vec{\nabla}$ i el rotacional $\vec{\nabla}\times$

MECÀNICA PRE-CLÀSSICA

μφ MECANICA

Principi de Conservació de l'Energia Mecànica

Substituint l'expressió de la força de la 2a llei de Newton en la definició de treball obtenim:

$$\mathrm{W} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} m\vec{a} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{dt}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{v_i}^{v_f} m\,\mathrm{d}\vec{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \int_{v_i}^{v_f} m\,\mathrm{d}\vec{v} \cdot \vec{v} = \int_{v_i}^{v_f} mv\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}mv^2\Big|_{v_i}^{v_f} = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 \equiv \Delta\mathrm{E}_c$$

on hem definit la quantitat $\mathrm{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ com l'energia cinètica que guanya (o perd) el mòbil pel treball efectuat per la força $\vec{\mathrm{F}}$ si aquesta ha *accelerat* (o *frenat*) el mòbil.
D'altra banda, si la força agent és una força conservativa, hem vist que es pot definir com el gradent d'un potencial i substituint aquesta definició en l'expressió del treball obtenim:

$$\mathrm{W} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{\mathrm{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} -\vec{\nabla}\mathrm{U} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} -\frac{\mathrm{dU}}{\mathrm{d}\vec{r}} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_i}^{r_f} -\mathrm{dU} = -\mathrm{U}\Big|_{r_i}^{r_f} = -\mathrm{U}(r_f) + \mathrm{U}(r_i) \equiv -\Delta\mathrm{U}$$

On recordem que l'energia potencial U només depen dels punts inicial r_i i final r_f. Combinant els dos resultats obtinguts…

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{W} = \Delta\mathrm{E}_c \\ \mathrm{W} = -\Delta\mathrm{U} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta\mathrm{E}_c = -\Delta\mathrm{U} \Longrightarrow \Delta\mathrm{E}_c + \Delta\mathrm{U} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} = 0}$$

Aquest és el principi de conservació de l'energia mecànica que es defineix com la suma de totes les energies que emmagatzema un mòbil, la seva energia cinètica, pel simple fet de tenir una velocitat no nul·la, i l'energia potencial que tingui per ser dins d'un camp de forces conservatives. L'energia mecànica total del sistema serà la mateixa en el punt r_i i en el punt r_f, de manera que si es perd energia cinètica es guanya de potencial i viceversa. L'energia es reconverteix de potencial a cinètica o de cinètica a potencial de manera que l'energia total roman constant. Aquest principi reposa sobre l'assumpció que les forces que actuen sobre el mòbil són conservatives. Quan aquesta condició no es satisfaci, el treball efectuat per les Forces No Conservatives W_FNC serà responsable d'una disminució de l'energia mecànica total del sistema segons el **Principi Generalitzat de la Conservació de l'Energia Mecànica**:

$$\boxed{\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} = \mathrm{W}_\mathrm{FNC}}$$

Principi de Conservació del Moment Lineal

Segons la forma general de la 2a llei de Newton, en absència de forces externes, el moment lineal s'ha de mantenir constant:

$$\sum\vec{\mathrm{F}} = 0 \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{dt}} = 0 \Longrightarrow \boxed{\Delta\vec{p} = 0}$$

Aquest resultat, conegut com el **Principi de Conservació de la Quantitat de Moviment**, és el principi físic sobre el que es recolza tot l'esudi de col·lisions entre objectes. Això és així doncs en una col·lisió, encara que hi actuin forces, són forces internes del sistema i per la tercera llei de Newton es cancelaran amb les forces de reacció quan s'estudïi la col·lisió *des de fora* del sistema. Però cal aclarir allò que en física es diu col·lisió doncs té un significat més ampli que en el llenguatge no científic:
Diem que dos o més mòbils **col·lisionen** quan *interaccionen* i es transfereixen moment lineal i energia els uns als altres i alteren els seus estats de moviment individuals encara que el moment lineal i l'energia col·lectius del sistema romanguin constants abans, durant i després de la interacció. Es poden distingir tres tipus de col·lisions: dispersions, xocs i explosions, que recollim en la taula següent. En tots els casos es conserva el moment lineal total del sistema, però en alguns casos no es conserva l'energia mecànica, quan hi hagin pèrdues calorífiques que dissipin energia a l'entorn:

Col·lisions	**Dispersió**	els mòbils interaccionen a distància	$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} = 0$	$\Delta\vec{p} = 0$
	Xoc Elàstic	contacte físic, els mòbils topen entre si	$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} = 0$	$\Delta\vec{p} = 0$
	Xoc Inelàstic	contacte físic, els mòbils topen entre si	$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} \neq 0$	$\Delta\vec{p} = 0$
	Xoc Inelàstic Perfecte	contacte físic, els mòbils topen entre si i, després de la interacció, queden enganxats com un sol cos	$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} \neq 0$	$\Delta\vec{p} = 0$
	Explosió	com el cas anterior rebobinant el temps, un mòbil es fragmenta en varis troços que s'allunyen entre si	$\Delta\mathrm{E}_\mathrm{M} \neq 0$	$\Delta\vec{p} = 0$