Matrius i Determinants

Conceptualització

Una **matriu** és una sel·lecció rectangular de nombres, símbols o expressions, una llista ordenada de dades i, des d'una òptica algebraica, un **tensor de segon ordre**. Els ítems de què es constitueix la matriu són els **elements** o entrades i es disposen en files i columnes. Una matriu de m **files** i n **columnes** direm que té **ordre** $m \times n$.

Aritmètica

SUMA: la suma de dos matrius del mateix ordre s'efectua sumant cada element per separat mantenint l'estructura:

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

REESCALAT: el producte d'un nombre per una matriu és una altra matriu amb tots els seus elements multiplicats pel nombre:

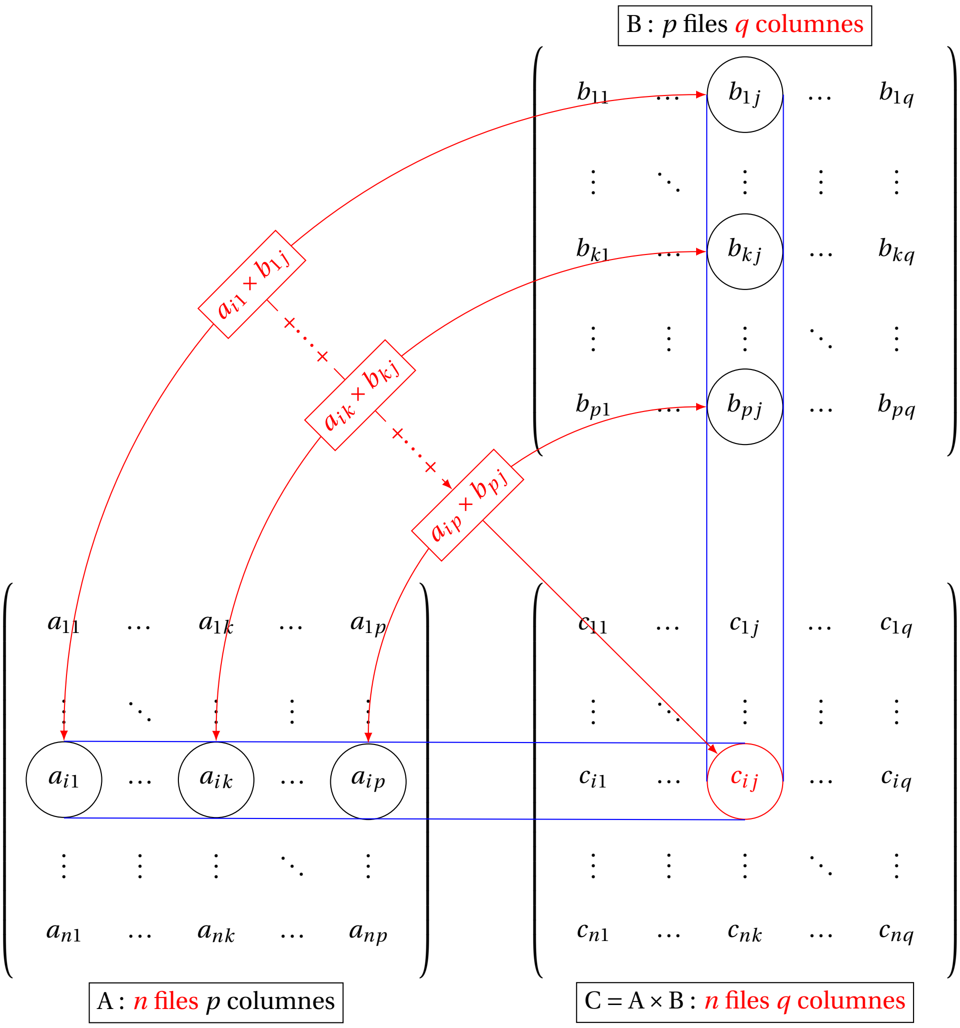
$$\lambda \cdot \mathrm{A} = \lambda \cdot (a_{ij}) = (\lambda \cdot a_{ij})$$

MULTIPLICACIÓ ENTRE MATRIUS: L'element c_{ij} es troba fent el producte escalar de la i-èssima fila de la matriu A per la j-èssima columna de la matriu B, tal i com s'especifica en la figura d'abaix. El producte entre matrius és no abelià $\Longrightarrow \mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$

Tipus de Matrius

Sigui $\mathrm{A} = (a_{ij})$ una matriu d'ordre $m \times n$

Nul·la: A és la matriu nul·la si $a_{ij} = 0 \; \forall i, j$
Oposada: la seva matriu oposada és $-\mathrm{A} = (-a_{ij})$
Transposada: la seva matriu transposta és $\mathrm{A}^{\top} = (a_{ji})$ (s'intercanvien files per columnes)
Quadrada: A és quadrada si $m = n$
Simètrica: A és simètrica si és quadrada i tots els elements del triangle superior a la diagonal són iguals als del triangle inferior (la diagonal actua de mirall): $a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$
Diagonal: A és diagonal si és quadrada i tots els elements fora la diagonal són zeros: $a_{ij} = 0 \; \forall i \neq j$
Identitat: $\mathbb{1}$ és la identitat si és diagonal i tots els elements de la diagonal són uns: $a_{ij} = 1 \; \forall i = j$



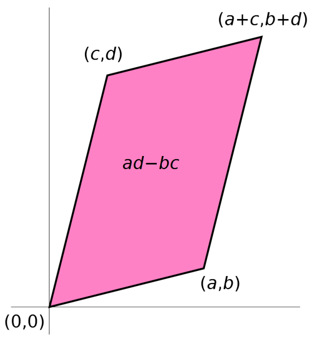
Matrius i Determinants

µφ ALGEBRA

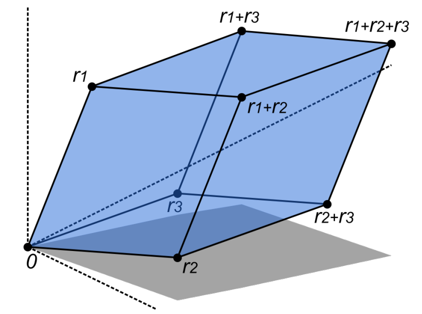
Determinants

Un **determinant** és un valor associat a matrius quadrades i es calcula a partir d'una certa expressió aritmètica entre les entrades de la matriu.

Quan les entrades de la matriu són nombres reals associats a una transformació lineal entre espais vectorials (traslacions, rotacions, lliscaments, reflexions i canvis de base) el valor del determinant té una interpretació geomètrica: el valor absolut del determinant ens dona el factor d'escala pel que quedarà multiplicada l'àrea o el volum entre vectors en una transformació lineal i el signe del determinant ens diu si es manté o inverteix la orientació dels vectors.



El determinant de la matriu formada pels vectors $\overrightarrow{ab}$ i $\overrightarrow{cd}$ és l'área del paral·lelogram que formen



El determinant de la matriu formada pels vectors $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ i $\vec{r}_3$ és el volum del paral·lelepípede que formen

Menors d'una matriu

Un **menor** d'una matriu A és el determinant d'una sub-matriu quadrada extreta d'A eliminant una o més de les seves files i/o columnes.
L'**ordre d'un menor** és el nombre files o columnes que conté.
Anomenem **primer menor** M_{ij} associat a un element a_{ij} al determinant de la matriu que resta d'eliminar la i-èssima fila i la j-èssima columna. Un primer menor només es pot computar sobre matrius que ja eren quadrades en primer lloc.

Cofactors o Adjunts

Anomenem **adjunt** o **cofactor** a^*_{ij} d'un element a_{ij} al primer menor *signat* associat a aquest element

$$a^*_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \mathrm{M}_{ij}$$

Anomenem **matriu adjunta** A^* d'una matriu quadrada, la matriu formada pels adjunts dels elements de la matriu original

$$\mathrm{A} = \left(a_{ij}\right) \Longrightarrow \mathrm{A}^* = \left(a^*_{ij}\right)$$

Càlcul de Determinants

Determinant d'Ordre N: Un determinant d'ordre n qualsevol es troba resseguint una sola linea (fila o columna, fixades a un valor $1 \leq k \leq n$) i multiplicant els elements d'aquella linea pels seus adjunts

$$|\mathrm{A}| = \sum_{i=1}^{n} a^*_{ik} \cdot a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a^*_{kj} \cdot a_{kj}$$

Determinant de 2on Ordre:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Longrightarrow |\mathrm{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Determinant de 3er Ordre: Es calcula amb la regla de Sarrus reescrivint la 1a i 2a columnes fora el determinant, multiplicant els elements units amb segments, sumant els diagonals i restant els anti-diagonals:

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Inversa d'una Matriu

$$\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathbb{1} \quad ; \quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathrm{A}|} (\mathrm{A}^*)^\top$$

Matrius i Determinants

ALGEBRA

Rang d'una Matriu

Anomenem **Rang** d'una matriu a l'ordre del menor més gran no nul que es pot extreure de la matriu. Per una matriu d'ordre $m \times n$ és clar que el rang no podrà ser superior al més petit dels dos nombres m i n. Per a matrius quadrades d'ordre n el rang no podrà ser superior a n.

Propietats dels Determinants

En aquesta secció, quan ens referim a una **línia** parlarem indistintament de files o columnes. Sigui $\mathcal{A}$ una matriu d'ordre n. Les següents propietats apliquen al seu determinant:

1. Si $\mathcal{A}$ és la matriu identitat $\mathbb{1}_n$ el seu determinant és 1
2. Un determinant és una *funció n-lineal*. Si una línia de la matriu $\mathcal{A}$ és formada per la suma de dos vectors línies, el seu determinant és la suma dels dos determinants obtinguts en trencar la suma:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1}+w_{i1} & v_{i2}+w_{i2} & \cdots & v_{in}+w_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{i1} & v_{i2} & \cdots & v_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{i1} & w_{i2} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

3. Si dos línies de la matriu $\mathcal{A}$ són idèntiques el seu determinant és 0
4. El determinant de la matriu transposada és igual al de la matriu original $\implies \left|\mathcal{A}^\top\right| = |\mathcal{A}|$
5. Si intercanviem dos línies de la matriu $\mathcal{A}$ el seu determinant es multiplica per -1
6. Afegir un escalar multiplicatiu al determinant és equivalent a multiplicar una sola de les línies per l'escalar

$$\lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda\cdot a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda\cdot a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{ni} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad \forall 1 < i < n$$

7. Traspassar un escalar multiplicatiu d'una línia a una altra no canvia el valor del determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda\cdot a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda\cdot a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{ni} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \lambda\cdot a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \lambda\cdot a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \lambda\cdot a_{nj} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \qquad \forall i \neq j$$

8. Si $\mathcal{A}$ és una matriu triangular $\big((i<j)\cup(i>j) \implies a_{ij}=0\big)$ el seu determinant equival al producte de les entrades de la diagonal: $\implies \det(\mathcal{A}) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\cdot a_{22}\cdots a_{nn}$
9. El determinant del producte de dos matrius és el producte dels determinants de cada matriu per separat: $\implies \det(\mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \det(\mathcal{A})\cdot\det(\mathcal{B})$
10. El determinant de la matriu inversa és l'invers del determinant de la matriu original: $\implies \det\left(\mathcal{A}^{-1}\right) = \frac{1}{\det(\mathcal{A})}$
11. El Teorema del Determinant de Sylvester estableix que si $\mathcal{A}$ és una matriu d'ordre $m\times n$ i $\mathcal{B}$ una matriu d'ordre $n\times m$, aleshores: $\implies \det(\mathbb{1}_m + \mathcal{A}\cdot\mathcal{B}) = \det(\mathbb{1}_n + \mathcal{B}\cdot\mathcal{A})$
12. L'expansió en sèries de Taylor per al determinant d'una matriu estableix que:

$$\det(\mathbb{1}_n + \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j}{j}\operatorname{tr}\left(\mathcal{A}^j\right)\right)^k \quad \text{on es defineix la traça d'una matriu com } \operatorname{tr}(\mathcal{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$