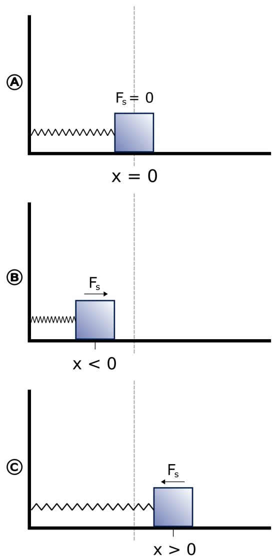
MOVIMENT HARMÒNIC

MECANICA

Conceptualització

Un moviment és **Periòdic** quan l'estat cinemàtic del sistema es repeteix cíclicament cada un cert temps fix que anomenem *Període*.
Un moviment és **Harmònic** quan l'estat cinemàtic del sistema sigui Periòdic i es pugui descriure a través de funcions trigonomètriques.
Un moviment és **Harmònic Simple** quan l'estat cinemàtic del sistema sigui Harmònic i es pugui descriure a través d'una única funció trigonomètrica.
Un moviment és **Vibratori** quan l'estat cinemàtic del sistema sigui Harmònic i el sistema oscil·li en una dimensió.
Tots aquests moviments són produïts per l'acció d'una **força recuperadora** que es fa més intensa com més s'allunya el mòbil de la posició d'equilibri i s'oposa a aquest allunyament —la força accelera el mòbil perquè aquest torni a la posició d'equilibri.

Ressort de Hooke



De la dinàmica d'un ressort (figura de l'esquerra) veiem que la força recuperadora responsable del moviment és la força elàstica de la molla. Aquesta comunica una acceleració anti-paral·lela a l'elongació x de la molla:

$$\mathrm{F}_k = -kx = ma \implies ma + kx = 0 \implies \frac{d^2x}{dt^2} + \tfrac{k}{m}x = 0$$

Aquesta és una equació diferencial sobre la variable x que té com a solució simple:

$$x(t) = \mathrm{A}\sin(\omega t + \varphi_o)\;;\; v(t) = \mathrm{A}\omega\cos(\omega t + \varphi_o)\;;\; a(t) = -\mathrm{A}\omega^2\sin(\omega t + \varphi_o)$$

$$\text{on s'ha definit } \omega \equiv \sqrt{k/m} \implies \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{m/k}$$

En aquesta solució purament matemàtica hi apareixen tres paràmetres amb un significat físic molt real:
A és l'**amplitud** del moviment, el mòbil oscil·la entre les posicions $-\mathrm{A}$ i $+\mathrm{A}$
ω, la **freqüència angular**, és una mesura indirecta del nombre d'oscil·lacions per segon que efectua el mòbil
φ_o és la **fase inicial** i determina quines eren les condicions inicials del sistema, on era i quina velocitat tenia el mòbil en l'instant inicial ($t = 0$)

Pèndol Isòcron Simple

De la dinàmica d'un pèndol (figura de la dreta) veiem que la força recuperadora responsable del moviment és la component tangencial del pes. Aquesta comunica una acceleració tangent a l'arc de corba s que segueix el pèndol:

$$\mathrm{F}_k = -\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a_t \implies a_t + g\sin\theta = 0 \implies \frac{d^2s}{dt^2} + g\cdot\sin\theta = 0$$

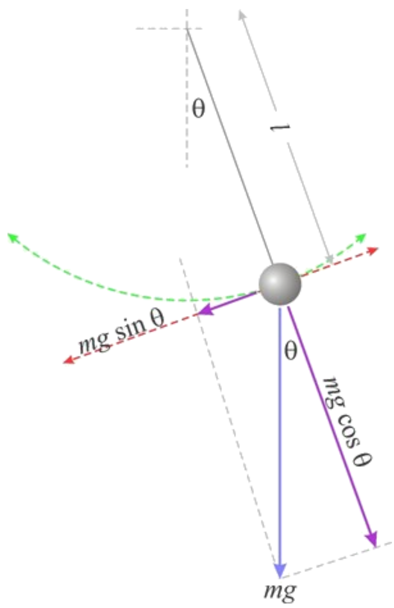
Aquesta és una equació diferencial no lineal doncs l'arc de corba s i l'angle d'inclinació θ estan relacionats a través d'un sinus. En l'aproximació de baixes amplituds, podem simplificar l'equació:

$$\ell \gg s_{max} \implies \sin\theta \approx \theta \implies \frac{d^2s}{dt^2} + g\cdot\theta = 0$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{\ell}(\ell\cdot\theta) = 0 \implies \frac{d^2s}{dt^2} + \tfrac{g}{\ell}s = 0$$

$$s(t) = s_{max}\sin(\omega t + \varphi_o) \text{ o dividint entre } \ell\;\; \theta(t) = \theta_{max}\sin(\omega t + \varphi_o)$$

$$\text{on s'ha definit } \omega \equiv \sqrt{g/\ell} \implies \mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$$



MOVIMENT HARMÒNIC

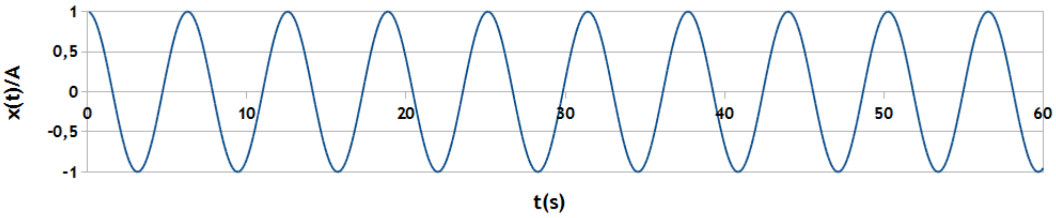
MECANICA

Oscil·lador Harmònic Simple

Aquest tipus d'oscil·lacions són les presentades per un sistema sense pèrdues com els presentats a la secció anterior. Hem vist que aquestes oscil·lacions sorgeixen d'una equació de moviment del tipus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \implies x(t) = A\sin(\omega_o t + \varphi_o) \quad ; \quad \omega_o = \sqrt{k/m}$$

El sistema oscil·la amb una amplitud fixa A. El moviment és etern i autoconsistent doncs l'energia mecànica total del sistema roman constant amb el temps.

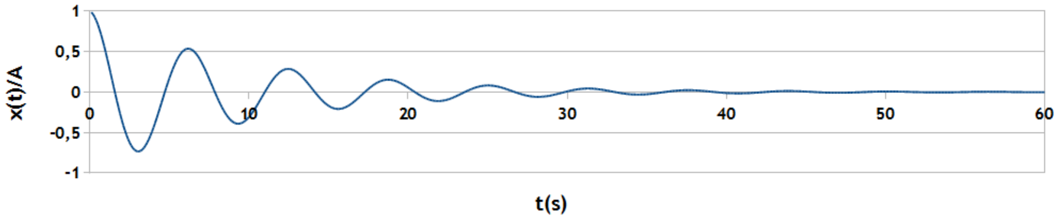


Oscil·lador Esmorteït

Quan un sistema pateix pèrdues degudes a forces de fricció proporcionals a la velocitat ($F_f = \beta v$), les oscil·lacions sorgeixen d'una equació del tipus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \implies x(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}\sin(\omega t + \varphi_o) \quad ; \quad \omega = \sqrt{k/m - (\beta/2m)^2}$$

Aquesta és una de les solucions anomenada règim d'esmorteïment dèbil quan $\beta^2 < 4km$. El sistema oscil·la amb una freqüència reduïda per la fricció i amb una amplitud decreixent doncs l'energia mecànica diminueix exponencialment amb el temps.



Oscil·lador Forçat a la Freqüència de Ressonància

Quan un sistema amb pèrdues per fricció es sotmet a una força externa periòdica, les oscil·lacions sorgeixen d'una equació del tipus:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\beta}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F}{m}\cos(\varpi t) \implies x(t) = \frac{F(k - m\varpi^2)}{(k - m\varpi^2)^2 - \beta^2 m^2 \varpi^2}\cos(\varpi t + \phi) \quad ; \quad \phi = \arctan\left(\frac{m\varpi^2 - k}{\beta\varpi}\right)$$

Per a aquesta solució simplificada el sistema oscil·la amb la freqüència ϖ de la força externa i amb una amplitud que depen de la magnitud d'aquesta força i també de la freqüència. Quan la força externa oscil·la amb una freqüència igual a la pròpia del sistema ($\varpi = \omega_o$) aquest entra en ressonància i l'amplitud d'oscil·lació comença a créixer linealment amb el temps. En absència de fricció aquesta amplitud pot esdevenir infinita!