GRAVITACIÓ

Conceptualització

La **interacció gravitatòria** és una de les 4 interaccions fonamentals de la natura. Aquesta interacció es produeix entre cossos que presentin la propietat fonamental que anomenem **massa**. És una interacció d'abast infinit i que sempre és atractiva.
Com tota la mecànica moderna, la interacció gravitatòria es descriu en el marc de la teoria de camps, que estudiarem en la seva versió pre-clàssica.

Magnituds Gravitatòries

Considerem una massa m_1. Aquesta impregna tot l'espai $\mathbb{R}^3$ al seu voltant amb dos camps, un camp vectorial que anomenem **camp gravitatori** $\vec{G}_1$ i un camp escalar que anomenem **potencial gravitatori** V_1. Ambdós són funcions de la **distància radial** r que ens allunya de la massa. Considerem ara una segona massa m_2. Aquesta massa, tan sols per ser a l'interior de la regió d'influència de la primera massa experimentarà una **força pes** $\vec{F}_2$ i tindrà una **energia potencial gravitatòria** U_2. Les 4 magnituds es relacionen de la següent manera:

$$\vec{G}_1(r) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r^2}\hat{r} \quad \natural \quad V_1(r) = -\mathcal{G}\frac{m_1}{r} \quad \natural \quad \underbrace{\vec{F}_2 = -\mathcal{G}\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\hat{r}}_{\text{Llei de la Gravitació Universal}} = m_2 \cdot \vec{G}_1(r) \quad \natural \quad U_2 = -\mathcal{G}\frac{m_1 \cdot m_2}{r} = m_2 \cdot V_1(r)$$

Principi de Superposició

Quan enlloc d'una massa aïllada tinguem una distribució discreta de n masses, cadascuna d'elles crearà els seus camps independentment de les altres i, pel Principi de Superposició, el càlcul del camp o potencial gravitatoris es redueix a la suma vectorial o escalar de totes les contribucions individuals de cada massa:

$$\vec{G}_T(r) = -\mathcal{G}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{r_i^2}\hat{r}_i \quad \natural \quad V_T(r) = -\mathcal{G}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i} \quad \natural \quad \vec{F}_2 = m_2 \cdot \vec{E}_T(r) \quad \natural \quad U_2 = m_2 \cdot V_T(r)$$

Lleis de Kepler

1. En un sistema de N+1 cossos lligats gravitatòriament a una massa hoste M, els N satèl·lits circulen en òrbites el·líptiques al voltant de la massa hoste essent aquesta centrada a un dels focus de les el·lipses.
2. Per a cadascun dels N satèl·lits, la raó entre el quadrat dels seus períodes de gir i el cub dels seus radis orbitals es manté constant. Aquesta raó és igual a la constant de Kepler (per a aquest sistema)
3. Els N satèl·lits orbiten a velocitat areolar constant (escombren àrees iguals en temps iguals)

$$\frac{T_i^2}{R_i^3} = \frac{T_j^2}{R_j^3} = k \equiv \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M} \quad \forall i,j = 1,\dots,N \quad \natural \quad \frac{d^2A}{dt^2} = 0$$

Energia associada al Camp Gravitatori

$$W_{i\to f} = \int_{r_i}^{r_f} \vec{F}\cdot d\vec{r} = U(r_i) - U(r_f) = -\Delta U \text{ (1)}$$

$r_i < r_f$	$r_i > r_f$
$W_{i\to f} < 0$	$W_{i\to f} > 0$
$U_2 \uparrow$	$U_2 \downarrow$

Quan el camp fa un treball positiu i m_2 perd energia potencial el moviment és espontani. Quan el camp fa un treball negatiu i m_2 guanya energia potencial el desplaçament s'ha de forçar des de l'exterior aportant energia doncs és un moviment contra-natural

Constant de la Gravitació Universal

L'escalar de proporcionalitat $\mathcal{G}$ que apareix a la llei de la gravitació universal és, juntament amb la velocitat de la llum al buit c, la constant reduïda de Planck $\hbar$ i la constant termodinàmica de Boltzmann $\mathcal{K}$, una de les 4 constants d'estructura universals, és a dir, una de les constants que determina la forma i contingut del nostre Univers. Es pot calcular a partir de la constant de Kepler k d'un sistema solar coneguda la massa hosta M:

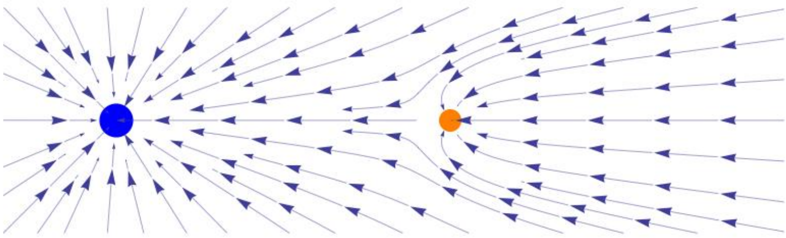
$$\mathcal{G} = \frac{4\pi^2}{k\cdot M} \implies \mathcal{G} = 6{,}6742\cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$$

---

(1) veure fitxa de mecànica newtoniana

GRAVITACIÓ

Línies de Camp i Teorema de Gauss



Les línies de camp gravitatori produïdes per una massa es despleguen radialment en les 3 direccions de l'espai.

Ja que la força gravitatòria sempre és atractiva el sentit de les línies de camp és sempre cap a endins.

A la figura de l'esquerra es presenten els perfils del camp gravitatori del sistema Terra-Lluna on es veu com les línies es corben per atansar-se cap a les dues masses i on s'ha obviat el dibuix del *paraboloid de Lagrange*, el locus de punts en els quals el camp gravitatori s'anul·la doncs l'atracció gravitatòria terrestre s'equilibra amb la llunar. El nombre de línies de camp que travesen una certa superfície $\mathcal{S}$ representa el flux de camp gravitatori Φ. Segons el teorema de Gauss[2] el flux de camp gravitatori es pot relacionar amb la massa total $\mathcal{M}_{int}$ atrapada dins de la superfície a través de l'expressió:

$$\Phi = 4\pi\mathcal{G}\cdot\mathcal{M}_{int} \quad \text{però també, per definició de flux,} \quad \Phi = \oint_{\mathcal{S}} \vec{G}\cdot d\vec{S}$$

i per tant obtenim un mètode per calcular el camp gravitatori generat per qualsevol distribució <u>contínua</u> de massa

$$\boxed{\oint_{\mathcal{S}} \vec{G}\cdot d\vec{S} = 4\pi\mathcal{G}\cdot\mathcal{M}_{int}}$$

Camp Gravitatori creat per un Astre de radi R

$$|\vec{G}| = \begin{cases} \mathcal{G}\dfrac{\mathcal{M}}{R^3}\cdot r & r < R \\ \mathcal{G}\dfrac{\mathcal{M}}{R^2} \equiv g_0 & r = R \\ \mathcal{G}\dfrac{\mathcal{M}}{r^2} & r > R \end{cases}$$

Mecànica de Satèl·lits

Per simplificació, només estudiarem satèl·lits que segueixin una òrbita circular impulsats per la força gravitatòria que actuarà de força centrípeta. Considerem un sistema general d'un astre de massa M i radi R al voltant del qual hi orbita un satèl·lit de massa m_s a una distància r del centre de l'astre o una altura h respecte la superfície de l'astre. A partir de la idetificació dinàmica

$$F_g = F_c \implies \mathcal{G}\cdot\frac{M\cdot m_s}{r^2} = m_s\cdot\frac{v^2}{r}$$

es poden establir totes les fòrmules emprades en la operativa de satèl·lits:

Velocitat Orbital

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R+h}}$$

Període de Revolució

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{\mathcal{G}M}}$$

Energia Mecànica

$$E_M = -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm_s}{r}$$

Velocitat d'Escapament

$$v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{r}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R+h}}$$

Velocitat de Llençament

$$v = \sqrt{2\mathcal{G}M\cdot\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)}$$

Energia per un salt orbital

$$\Delta E = \frac{1}{2}\mathcal{G}M\cdot\left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f}\right)$$

Connexió entre Seccions Còniques i les Òrbites de Satèl·lits

Les trajectòries cinemàtiques que segueixen els cossos a l'espai sempre són descrites matemàticament a partir de les seccions còniques i amb l'energia mecànica total del satèl·lit com a paràmetre principal:

Òrbita tancada		Òrbita oberta	
Circular	El·líptica	Parabòlica	Hiperbòlica
$E_M < 0$ $v_o \perp F_g$	$E_M < 0$ $v_o \not\perp F_g$	$E_M = 0$	$E_M > 0$
seguida per la majoria dels satèl·lits artificials que envolten la Terra	llunes al voltant dels planetes i planetes al voltant del Sol		objectes transitoris que entren al sistema solar temporalment

[2] veure teorema de la divergència a l'apèndix de càlcul vectorial