GEOMETRIA AFÍ EN 3D

Conceptualització

En geometria lineal, així com els objectes que viuen en l'espai bidimensional $\mathbb{R}^2$ són punts i rectes, els objectes que viuen en l'espai tridimensional $\mathbb{R}^3$ són punts, rectes i plans.
En l'espai euclidi $\mathbb{R}^3$ un punt es descriu amb 3 coordenades determinades pels 3 eixos que generen l'espai.
Un locus d'infinits punts alineats en una única direcció conformen una recta que es genera a partir d'un punt de referència $\mathrm{P}(a,b,c)$ i un vector director $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ que marca la direcció de la recta.
Un locus d'infinits punts alineats de forma extesa al llarg de dos direccions independents conformen un pla que es genera a partir d'un punt de referència $\mathrm{P}(a,b,c)$ i dos vectors directors $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$ i $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ que marquen les dos direccions independents del pla.

Equacions del Pla

Equació Vectorial

$$\pi:(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(v_x,v_y,v_z)+\mu(u_x,u_y,u_z)$$

Equacions Paramètriques

$$\pi:\begin{cases} x=a+\lambda\cdot v_x+\mu\cdot u_x \\ y=b+\lambda\cdot v_y+\mu\cdot u_y \\ z=c+\lambda\cdot v_z+\mu\cdot u_z \end{cases}$$

Equació Implícita

$$\pi:\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0\mapsto\vec{n}=(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C})\perp\pi$$

Equació Canònica/Segmentària

$$\pi:\frac{x}{t_x}+\frac{y}{t_y}+\frac{z}{t_z}=1\mapsto t_x\equiv{}^{-\mathrm{D}}/_{\mathrm{A}}\,;\ t_y\equiv{}^{-\mathrm{D}}/_{\mathrm{B}}\,;\ t_z\equiv{}^{-\mathrm{D}}/_{\mathrm{C}}$$

on t_x, t_y i t_z són les interseccions del pla amb els eixos

Equacions de la Recta

Equació Vectorial

$$r:(x,y,z)=(a,b,c)+\lambda(v_x,v_y,v_z)$$

Equacions Paramètriques

$$r:\begin{cases} x=a+\lambda\cdot v_x \\ y=b+\lambda\cdot v_y \\ z=c+\lambda\cdot v_z \end{cases}$$

Equacions Contínues

$$r:\frac{x-a}{v_x}=\frac{y-b}{v_y}=\frac{z-c}{v_z}$$

Equació Implícita
(com a intersecció de dos plans)

$$r:\begin{cases} \mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0 \\ \mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'z+\mathrm{D}'=0 \end{cases}$$

Càlcul de Distàncies

- **Distància d'un Punt P a un Recta s definida per un punt A i un vector director $\vec{v}_d$**

$$d(\mathrm{P},s)=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\times\vec{v}_d\right|}{|\vec{v}_d|}$$

- **Distància entre Rectes Paral·leles:** S'escull un punt qualsevol d'una de les rectes i s'efectua el càlcul anterior determinant la distància des del punt escollit fins l'*altra* recta

- **Distància entre Rectes Creuades:** Donades les rectes s i t amb vectors directors respectius $\vec{v}_d^{(s)}$ i $\vec{v}_d^{(t)}$ es determinen respectivament a s i t els punts A i B que es troben sobre la perpendicular comú

$$d(s,t)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}},\vec{v}_d^{(s)},\vec{v}_d^{(t)}\right]\right|}{\left|\vec{v}_d^{(s)}\times\vec{v}_d^{(s)}\right|}$$

- **Distància d'un Punt $\mathrm{P}(x_o,y_o,z_o)$ a un Pla π d'equació $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}=0$**

$$d(\mathrm{P},\pi)=\frac{|x_o\cdot\mathrm{A}+y_o\cdot\mathrm{B}+z_o\cdot\mathrm{C}+\mathrm{D}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2}}$$ on al numerador les barres || referencien el valor absolut

- **Distància entre Plans Paral·lels:** S'escull un punt qualsevol d'un dels plans i s'efectua el càlcul anterior determinant la distància des del punt escollit fins l'*altre* pla

GEOMETRIA AFÍ EN 3D

Càlcul d'Angles

Els angles encaixats entre varietats es calculen a partir de la fòrmula de l'angle que formen 2 vectors $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ entre si:

$$\alpha\left(\vec{v},\vec{\omega}\right)=\arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{\omega}}{|\vec{v}||\vec{\omega}|}\right)$$

- Angle entre dues Rectes: És l'angle *agut* format pels dos vectors directors de les rectes r i s

$$\alpha\left(r,s\right)=\alpha\left(\vec{v}_d^{(r)},\vec{v}_d^{(s)}\right)$$

- Angle entre dos Plans: És l'angle *agut* format pels dos vectors normals dels dos plans π_1 i π_2

$$\alpha\left(\pi_1,\pi_2\right)=\alpha\left(\vec{n}_{\pi_1},\vec{n}_{\pi_1}\right)$$

- Angle entre una Recta i un Pla: És l'angle *complementari a l'angle agut* format pel vector director de la recta s i el vector normal al pla π

$$\alpha\left(s,\pi\right)=\frac{\pi}{2}-\alpha\left(\vec{v}_d^{(s)},\vec{n}_\pi\right)=90^\circ-\alpha\left(\vec{v}_d^{(s)},\vec{n}_\pi\right)$$

Posicions Relatives entre 2 Rectes a l'espai $\mathbb{R}^3$

Rectes donades com a Interseccions de Plans

Considerem les 2 rectes s i t definides per la intersecció de 4 plans secants per parelles i amb equacions

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\\ t:\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0\\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0\end{cases}\end{array}\right\}$$

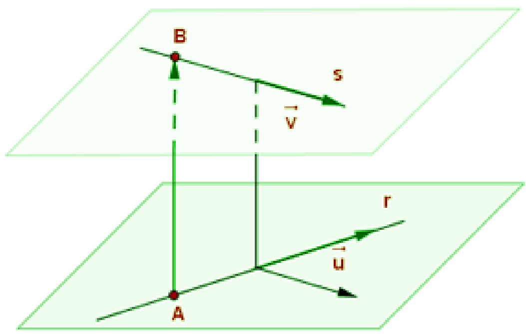
Pensem el conjunt de les 4 equacions dels plans com un sistema d'equacions lineals i n'extreiem la matriu del sistema i la matriu ampliada. Siguin r i r_a els seus rangs respectius, aleshores podem escriure la taula següent que caracteritza les posicions relatives de les dues rectes en funció dels valors d'aquests rangs.

r	r_a	**Posició Relativa**
3	4	(1) les rectes s'encreuen
3	3	(2) les rectes són secants
2	3	(3) les rectes són paral·leles
2	2	(4) les rectes són coincidents

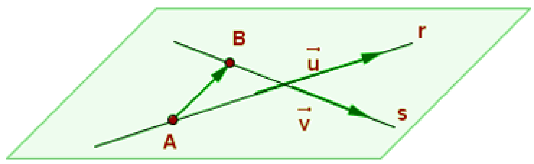
Rectes a partir de Punts i Vectors Directors

s definida pel punt $A(x_1,y_1,z_1)$ i el vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$
t definida pel punt $B(x_2,y_2,z_2)$ i el vector $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$

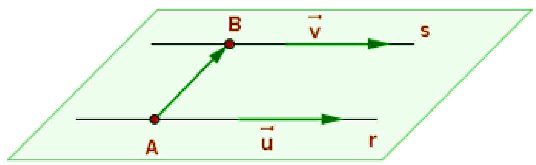
$$\begin{cases} \vec{v}\not\propto\vec{u}\begin{cases}\left[\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]\neq 0 \implies \text{(1) } s \text{ creua } t\\ \left[\vec{v},\vec{u},\overrightarrow{AB}\right]=0 \implies \text{(2) } s \text{ talla } t\end{cases}\\ \vec{v}\propto\vec{u}\begin{cases}\vec{v}\not\propto\overrightarrow{AB} \implies \text{(3) } s \text{ paral·lela a } t\\ \vec{v}\propto\overrightarrow{AB} \implies \text{(4) } s \text{ conté } t\end{cases}\end{cases}$$



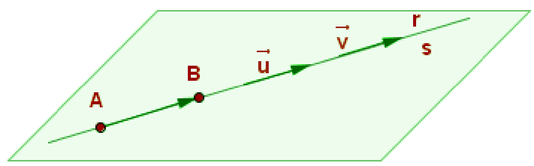
(1)



(2)



(3)



(4)

GEOMETRIA AFÍ EN 3D

Posicions Relatives entre un Pla i una Recta a l'espai $\mathbb{R}^3$

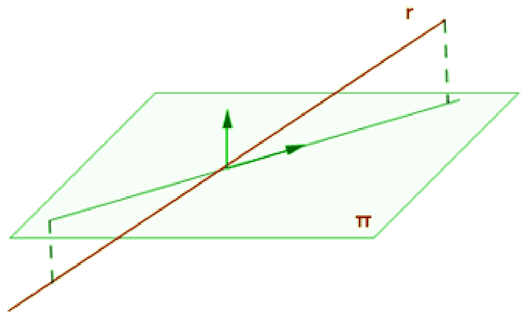
RECTA DEFINIDA COM A INTERSECCIÓ ENTRE DOS PLANS

Considerem la recta s definida per la intersecció de 2 plans i el pla π d'equacions

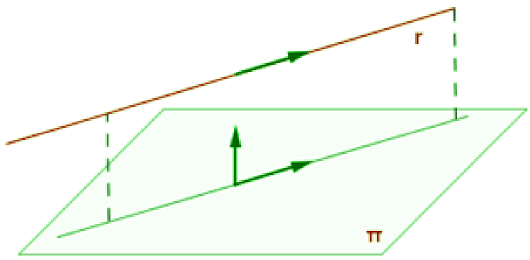
$$s:\left\{\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}\right. \qquad A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

Pensem el conjunt de les 3 equacions dels plans com un sistema d'equacions lineals i n'extreiem la matriu del sistema i la matriu ampliada. Siguin r i r_a els seus rangs respectius, aleshores podem escriure la taula següent:

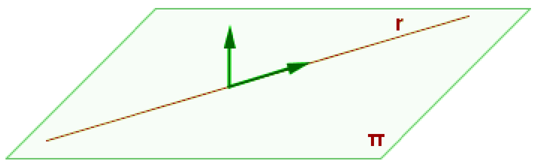
r	r_a	**Posició Relativa**
3	3	(1) la recta intersecta el pla
2	3	(2) recta i pla són paral·lels
2	2	(3) recta continguda en el pla



(1)



(2)



(3)

RECTA A PARTIR D'UN PUNT I UN VECTOR DIRECTOR

s definida pel punt $Q(x_1,y_1,z_1)$ i el vector $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$
π definit pel seu vector associat normal $\vec{n}=(A_3,B_3,C_3)$

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{v}\cdot\vec{n}\neq 0 \implies \text{(2) } s \text{ talla } \pi \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \left\{\begin{array}{l} Q\notin\pi \implies \text{(2) } s \text{ paral·lela a } \pi \\ Q\in\pi \implies \text{(3) } s \text{ continguda en } \pi \end{array}\right.\end{array}\right.$$

Posicions Relatives entre 2 Plans a l'espai $\mathbb{R}^3$

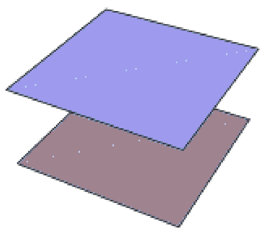
Considerem els dos plans següents:

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

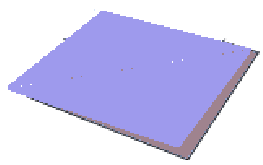
La relació entre els seus coeficients determina la posició relativa entre els 2 segons l'arbre de decisions següent

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$?
- NO → **(1) Secants**
- SÍ → $\frac{A_1}{A_2}=\frac{D_1}{D_2}$?
  - NO → **(2) Paral·lels**
  - SÍ → **(3) Coincidents**

(1)



(2)



(3)

GEOMETRIA AFÍ EN 3D

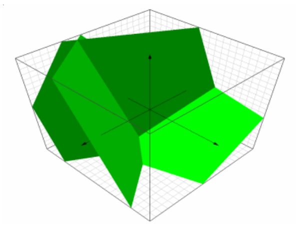
Posicions Relatives entre 3 Plans a l'espai $\mathbb{R}^3$

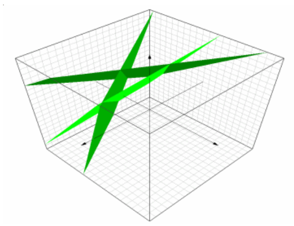
Considerem els 3 plans d'equacions

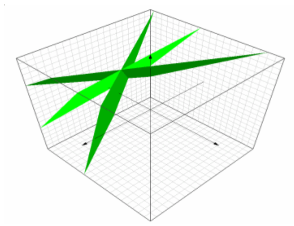
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

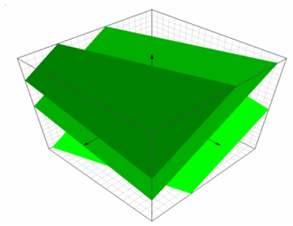
Pensem el conjunt de les 3 equacions dels plans com un sistema d'equacions lineals i n'extreiem la matriu del sistema i la matriu ampliada. Siguin r i r_a els seus rangs respectius, aleshores podem escriure la taula següent que caracteritza les posicions relatives entre els 3 plans en funció dels valors d'aquests rangs.

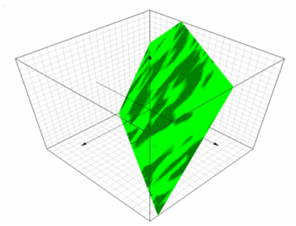
r	r_a	**proporcionalitat**	**Posició Relativa**
3	3		(1) els tres plans són secants en un punt
2	3		(2) plans secants 2 a 2
		$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	(3) dos plans paral·lels i el tercer secant
2	2		(4) els tres plans són secants en una recta
		$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	(5) dos plans coincidents i el tercer secant
1	2		(6) els tres plans són paral·lels disjunts
		$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	(7) dos plans coincidents i el tercer paral·lel
1	1		(8) els tres plans són coincidents

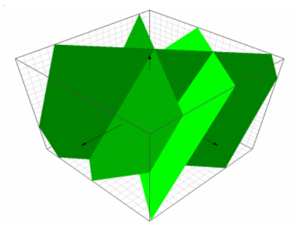

(1)

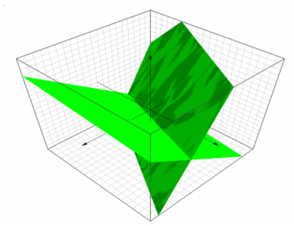

(2)

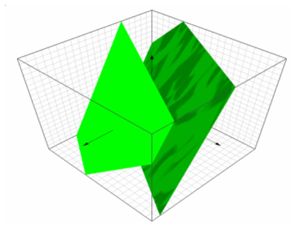

(4)


(6)


(8)


(3)


(5)


(7)