Estudi de Funcions

ANALISI

Conceptualització

L'**estudi analític d'una funció** consisteix a classificar i caracteritzar el comportament d'aquesta a través d'una sèrie de paràmetres fins tenir prou informació com per esboçar-ne el seu gràfic. Tots els paràmetres usats per classificar la funció es poden englobar en 5 categories:

- les seves **regions d'existència**
- les seves **interseccions** amb els eixos
- el seu **comportament als extrems llunyans** del pla
- la seva **tonicitat**
- la seva **curvatura**

Regions d'Existència

Les **regions d'existència** d'una funció es determinen a partir de dos esquemes: el domini i el recorregut.

- Anomenem **Domini** d'una funció $f(x)$ el conjunt de valors de la variable x per als quals es pot computar un únic valor de la funció. Direm que un valor $x = a$ pertany al domini si existeix $y = f(a)$ i aquest valor $f(a)$ serà la **imatge** de a
$$\mathscr{D}[f] = \{x \in \mathbb{R} | \exists f(x) \in \mathbb{R}\}$$
- Anomenem **Recorregut** d'una funció $f(x)$ el conjunt de valors de la variable y per als quals existeix almenys un valor d'x tal que la seva imatge sigui precisament aquella y. Direm que un valor $y = b$ pertany al recurregut si existeix $x = a$ tal que $f(a) = b$ i aquest valor a serà la **anti-imatge** de b
$$\mathscr{R}[f] = \{y \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R} \wedge f(x) = y\}$$

El recorregut d'una funció es pot descriure més fàcilment un cop s'ha esboçat el gràfic de la funció, però el domini es pot computar *a priori* en base a les següents regles generals:

— El domini de funcions polinòmiques, trigonomètriques o exponencials sempre serà tots els reals
$$f(x) = \mathrm{P}(x), \sin(u(x)), \cos(u(x)), k^{u(x)} \mapsto \mathscr{D}[f] = \mathbb{R}$$

— El domini de funcions racionals sempre serà tots els reals excepte les arrels del polinomi del denominador
$$f(x) = \tfrac{p(x)}{q(x)} \mapsto \mathscr{D}[f] = \mathbb{R} - \{r_i \,|\, q(r_i) = 0 \wedge i = 1, \ldots, gr(q)\}$$

— El domini de funcions irracionals d'índex parell o logarítmiques sempre serà tots els reals excepte el rang de valors que facin negatiu el radicand de l'arrel o l'argument del logaritme
$$f(x) = \sqrt[2n]{p(x)}, \log_a\left(p(x)\right) \mapsto \mathscr{D}[f] = \mathbb{R} - \{x \,|\, p(x) < 0\}$$

— El domini de funcions compostes entre els tipus de funcions anteriors serà tots els reals excepte el rang de valors exclosos per la funció composada més restrictiva

Interseccions amb els eixos

Les interseccions amb els eixos o **punts de tall** són els punts en què la funció creua els eixos d'abcises i ordenades. Per definició de funció, de punts de tall amb l'eix d'ordenades només pot haver-hi un com a màxim però de punts de tall amb l'eix d'abcises poden haver-ne infinits. Com trobar-los es redueix a aplicar els següents esquemes:

- Punt de tall amb l'eix y d'ordenades: $\mathrm{P}_{\vdash}^{(y)} = (0, f(0))$
- Punts de tall amb l'eix x d'abcises: $\mathrm{P}_{\vdash}^{(x)} = \{(t_i, 0) \,|\, f(t_i) = 0\,;\; i \in \mathbb{N}\}$

Estudi de Funcions

ANALISI

Comportament als Extrems Llunyans

Descriure el **comportament de la funció als extrems llunyans** és estudiar els valors que pren la funció a mida que ens allunyem infinitament cap a la dreta (valors positius de x) o l'esquerra (valors negatius de x) del pla. Considerant possibles restriccions provinents del Domini de la funció, en general l'estudi als extrems llunyans s'efectua amb el següent esquema:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \begin{cases} = \pm\infty \\ = k \in \mathbb{R} \end{cases}$

Si el límit computat ha estat igual a k, direm que la funció $f(x)$ té una **asímptota horitzontal a l'altura** $y = k$
Si el límit computat ha estat igual a $\pm\infty$ haurem de diferenciar entre dos possibles escenaris, un (de)creixement arbitrari o un (de)creixement asimptòtic en el qual la funció creix indefinidament però ho fa atansant-se progressivament a una paret inclinada intocable. Distingim aquests dos escenaris amb el següent esquema:

- $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} = \pm\infty \\ = m \in \mathbb{R} \mapsto \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R} \end{cases}$

Si el límit computat ha estat igual a $\pm\infty$, direm que la funció es dispara arbitràriament sense límit.
Si el límit computat ens ha donat un parell de valors reals m i n, direm que la funció $f(x)$ té una **asímptota oblíqua** caracteritzada per l'equació $y = mx + n$

Tonicitat i Punts Crítics

L'estudi de la **tonicitat d'una funció** determina en quins intervals del seu domini la funció és creixent o decreixent.
Direm que la funció és **creixent** quan el **pendent** del seu gràfic sigui **positiu** –avançant cap a valors majors de x, la y es fa major, $a < b \implies f(a) < f(b)$
Direm que la funció és **decreixent** quan el **pendent** del seu gràfic sigui **negatiu** –avançant cap a valors majors de x, la y es fa menor, $a < b \implies f(a) > f(b)$
Una funció monòtona creixent o decreixent és una funció que maté la seva tonicitat al llarg de tot el seu domini.
Una funció polítona que alterni regions creixents i regions decreixents forçosament contindrà punts de transició on el pendent del gràfic no serà ni positiu ni negatiu. Aquests punts s'anomenen punts crítics i es classifiquen en tres tipus:

— MÀXIMS: En un màxim la funció transmuta des d'un règim creixent a un de decreixent. Metafòricament, si pensem el gràfic de la funció com un perfil muntanyós, un màxim representa el pic d'una muntanya.

— MÍNIMS: En un mínim la funció transmuta des d'un règim decreixent a un de creixent. Metafòricament, si pensem el gràfic de la funció com un perfil muntanyós, un mínim representa el fons d'una vall.

— INFLEXIONS: En un punt d'inflexió la funció s'aplana momentàniament però no altera la seva tonicitat als voltants del punt, segueix (de)creixent si venia d'un règim (de)creixent.

La tonicitat i la presència de punts crítics es pot caracteritzar amb els següents esquemes:

- Una funció serà creixent allà on la seva funció derivada sigui positiva

$$f(x) \nearrow \{x \in \mathscr{D}[f] \mid f'(x) > 0\}$$

- Una funció serà decreixent allà on la seva funció derivada sigui negativa

$$f(x) \searrow \{x \in \mathscr{D}[f] \mid f'(x) < 0\}$$

- Una funció presentarà punts crítics en les coordenades on la funció derivada s'anuli. Per classificar el tipus de punt crític s'analitza el signe de la segona derivada o en el seu defecte la paritat de la primera derivada no nul·la. Si la primera derivada avaluada al punt crític no nul·la és d'ordre senar, aleshores el punt crític serà una inflexió, si és d'ordre parell, no podrem dir res al respecte.

$$\{\text{Punts Crítics}\} = \{x_c \in \mathscr{D}[f] \mid f'(x_c) = 0\} \begin{cases} f''(x_c) < 0 \implies x_c \text{ MÀX} \\ f''(x_c) > 0 \implies x_c \text{ MÍN} \\ f''(x_c) = 0 \mapsto f^{(k)}(x_c) \neq 0 \wedge k = 2n-1, n \in \mathbb{N} \implies x_c \text{ INFLX} \end{cases}$$

ESTUDI DE FUNCIONS

$\mu\varphi$ ANALISI

Curvatura

L'estudi de la **curvatura d'una funció** determina en quins intervals del seu domini la funció és còncava o convexa.
Direm que la funció és **còncava** quan el **signe de la seva segona derivada** sigui **positiu**.
Direm que la funció és **convexa** quan el **signe de la seva segona derivada** sigui **negatiu**.
La curvatura en diferents trams de la funció es pot determinar amb els següents esquemes:

- CONCAVITAT: $f(x) \smile \{x \in \mathcal{D}[f] \mid f''(x) > 0\}$
- CONVEXITAT: $f(x) \frown \{x \in \mathcal{D}[f] \mid f''(x) < 0\}$

Exemple pràctic

Considerem la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-4}$*. Calculm les seves derivades de 1r i 2n ordre:*

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(2x-4) - x^2\cdot(2)}{(2x-4)^2} = \boxed{\frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}} \qquad f''(x) = \frac{(4x-8x)\cdot(2x-4)^2 - (2x^2-8x)\cdot 2(2x-4)2}{(2x-4)^4} = \boxed{\frac{32}{(2x-4)^3}}$$

Determinem els punts de tall i el domini (igualant el denominador de la funció a zero per trobar les interrupcions):

$$2x-4=0 \implies x=2 \text{ és una asímptota vertical} \implies \mathfrak{D}[f] = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\langle x\rangle : f(x) = 0 \implies \frac{x^2}{2x-4} = 0 \implies x=0 \implies \langle x\rangle : (0,0) \quad \langle y\rangle : f(0) = \frac{0^2}{2\cdot 0-4} = 0 \implies y=0 \implies \langle y\rangle : (0,0)$$

Comparant els ordres dels polinomis de numerador i denominador queda clar que hi haurà una asímptota oblíqua a més de la vertical ja trobada:

$$\text{AV}\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \sim \dfrac{(1,9)^2}{2(1,9)-4} = \dfrac{+}{-} \to -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \sim \dfrac{(2,1)^2}{2(2,1)-4} = \dfrac{+}{+} \to +\infty \end{cases} \quad \text{AO}\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x^2-4x} = \dfrac{\infty^2}{2\infty^2-4\infty} \to \dfrac{\infty^2}{2\infty^2} = 1/2 \\ n = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{2x-4} - \dfrac{x}{2} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x}{4x-8} = \dfrac{4\infty}{4\infty-8} \to 1 \end{cases}$$

Determinem si hi ha punts crítics i de quins tipus són:

$$f'(x) = 0 \implies \frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2} = 0 \implies 2x^2-8x = 2x(x-4) = 0 \implies \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

$$f''(0) = \frac{32}{(2\cdot 0-4)^3} = -0,5 < 0 \implies x=0 \quad \text{MAX} \qquad f''(4) = \frac{32}{(2\cdot 4-4)^3} = +0,5 > 0 \implies x=4 \quad \text{MIN}$$

La curvatura ve donada pel signe de la segona derivada. Ja que aquesta és el quocient $\dfrac{32}{(2x-4)^3}$ *i el numerador sempre és positiu, el signe de la segona derivada ve determinat pel signe del denominador.*

$$2x-4<0 \implies x<2 \implies \mathcal{S}\left(f''\right) = \frac{+}{-} = - \implies \text{quan } x<2\ f''<0 \text{ i per tant } f \text{ és convexa}$$

$$2x-4>0 \implies x>2 \implies \mathcal{S}\left(f''\right) = \frac{+}{+} = + \implies \text{quan } x>2\ f''>0 \text{ i per tant } f \text{ és còncava}$$

Finalment, recopilant tota la informació trobada en els apartats anteriors, dibuixem la gràfica de la funció

Exemple pràctic (cont.)