

# SECCIONS CÒNIQUES

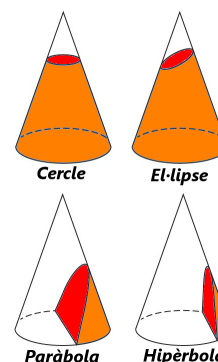
## Conceptualització

Una **cònica**, o secció cònica, és una corba algebraica de  $2^{on}$  ordre i el lloc geomètric format pels punts la distància dels quals a un punt fix i a una recta de referència és una raó constant.

El punt fix s'anomena **focus** de la cònica i la recta s'anomena la **directriu**.

Totes les còniques es poden visualitzar a través de la intersecció d'una superfície cònica i un pla inclinat. Les diferents inclinacions del pla generen diferents figures d'intersecció que es corresponen amb els tres tipus principals de còniques:

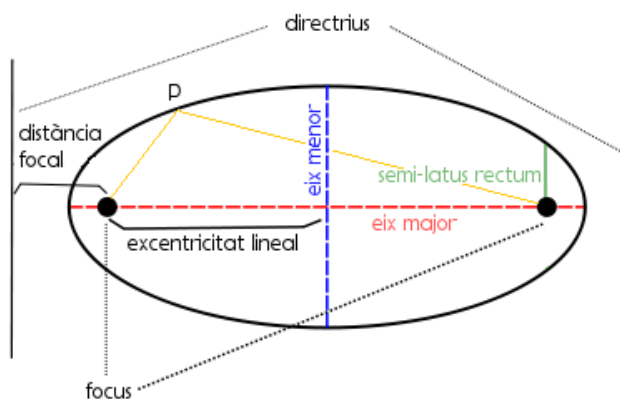
- Corbes **El·líptiques** (i el seu cas degenerat, el **Cercle**)
- Corbes **Parabòliques**
- Corbes **Hiperbòliques**



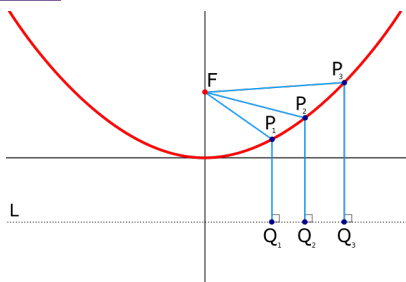
## El·lipse

L'El·lipse es construeix de manera que la suma de les distàncies des d'un punt de l'el·lipse fins als dos focus roman constant i és igual a l'eix major d'aquella. Els seus paràmetres són:

- $a$ : longitud del semi-eix major (sobre l'eix  $x$ )
- $b$ : longitud del semi-eix menor (sobre l'eix  $y$ )
- $f$ : distància des dels focus fins el centre
- $e$ : excentricitat, l'elongació de l'el·lipse
- $p$ : distància focal
- $\ell$ : semi-latus rectum, corda paral·lela a la directriu que uneix un focus amb l'el·lipse

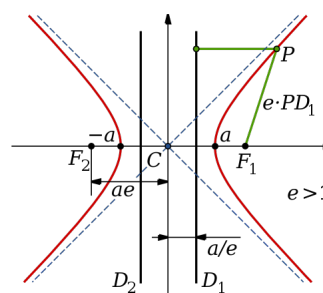


## Paràbola



La Paràbola és el lloc geomètric dels punts que equidisten al focus  $F$  i a la directriu  $L$ . El vèrtex de la paràbola és el punt mig del segment que uneix  $F$  amb la seva projecció sobre  $L$ .

## Hipèrbola

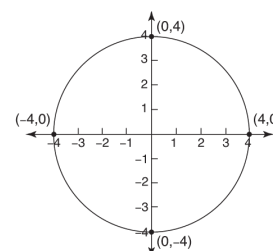


Una Hipèrbola és el lloc geomètric dels punts per als quals la raó de les distàncies a un focus  $F_1$  i a una directriu  $D_1$  és una constant  $e > 1$  que representa l'excentricitat.

## Cercle

El Cercle és el lloc geomètric dels punts que equidisten a un focus anomenat centre del cercle. És també una degeneració de l'el·lipse, un cas particular d'aquesta, en què els dos focus de l'el·lipse s'han anat apropant l'un a l'altre fins col·lapsar en un sol focus.

Tot i que no és una secció cònica en si mateixa —insistim en què és un tipus particular d'el·lipse— tendeix a estudiar-se com un cas separat per les seves propietats particulars i per la seva gran importància històrica.



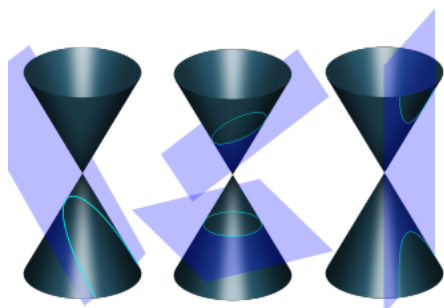
# SECCIONS CÒNIQUES

Taula de Relacions per a les diverses Seccions Còniques

Cònica	Equació	Excentricitat ( $\epsilon$ )	Exc. Linear ( $f$ )	Semi-latus Rectum ( $\ell$ )	Distància focal ( $p$ )
CERCLE	$x^2 + y^2 = a^2$	0	0	$a$	$\infty$
EL·LIPSE	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$b^2/f$
PARÀBOLA	$y^2 = 4ax$	1	$2a$	$2a$	$2a$
HIPÈRBOLA	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{b^2}{a}$	$b^2/f$

Còniques com a interseccions entre un Pla i un Conus

Sigui  $\varphi$  el pla seccionador que talla el conus en diferents inclinacions:



- Si  $\varphi$  intersecta perpendicularment a l'eix del conus es genera un cercle
- Si  $\varphi$  intersecta amb un cert angle superior a l'angle d'obertura del conus, el tall és una corba tancada i es genera una el·lipse
- Si  $\varphi$  intersecta paral·lelament a l'angle d'obertura del conus, el tall és una corba oberta i es genera una paràbola
- Si  $\varphi$  intersecta amb un cert angle inferior a l'angle d'obertura del conus, es tallen els dos pètals del conus amb una corba oberta de dues branques i es genera una hipèrbola

Dissertacions sobre l'excentricitat  $\epsilon$  de les Còniques

L'excentricitat és de fet el paràmetre clau per entendre la transició d'una cònica a una altra.

- $\epsilon = 0$ : Hi ha un sol focus del que equidisten tots els punts i es forma la simetria circular
- $0 < \epsilon < 1$ : El focus es desdobra i el cercle es deforma per formar una el·lipse. A mida que la distància entre els focus augmenta l'excentricitat creix i l'el·lipse es va elongant arbitràriament.
- $\epsilon = 1$ : en el límit en què els dos focus es separen una distància infinita l'el·lipse es trenca per un costat i es forma la branca oberta d'una paràbola.
- $\epsilon > 1$ : Immediatament després, el més mínim increment en l'excentricitat fa que les branques de la paràbola es despleguin amb una obertura superior i apareix la doble corba de la hipèrbola així com les dues asymptotes a les quals s'atancen les branques d'aquesta

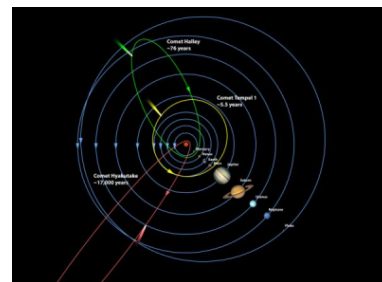
Importància de les Seccions Còniques en Física



La triangulació de la posició que efectuen els satèl·lits GPS es basa en la geometria d'hipèrboles



Les antenes i radiotelescopis de tot el món són plats parabòlics per maximitzar el senyal



Les òrbites que ressegueixen tots els cossos del Sistema Solar són el·líptiques o quasi-circulars