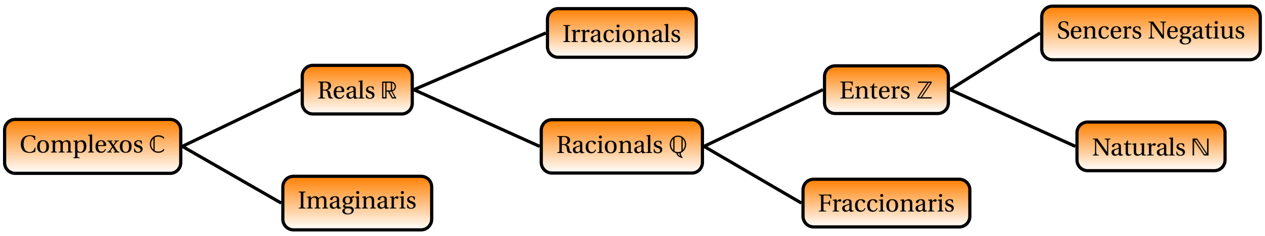
Nombres Complexos

ARITMETICA



Conceptualització

La **unitat imaginària** i és el constructe matemàtic $i \equiv \sqrt{-1}$
Un **nombre imaginari pur** bi és un múltiple de la unitat imaginària essent b un nombre real $b \in \mathbb{R}$
Un **nombre complex** z és la combinació d'un nombre real a i un nombre imaginari pur bi
L'espai dels nombres complexos és isomorf a l'espai real bidimensional $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ i, per tant, els nombres complexos tenen una representació bidimensional que es pot tractar de forma equivalent a l'àlgebra vectorial de 2 dimensions. El pla complex $\mathbb{C}$ es visualitza a partir d'un eix horitzontal que representa la recta real $\mathbb{R}$ i un eix perpendicular a aquest que representa la recta imaginària pura $\mathbb{I}$. En aquest pla, un nombre complex $z = a + bi$ és un punt amb coordenades a i b on a és la part real de z, $\Re\{z\} = a$, i b és la part imaginària de z, $\Im\{z\} = b$.

Representacions Formals de Nombres Complexos

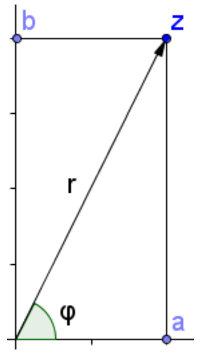
Forma Cartesiana

Un nombre complex $z = a + bi$ s'escriu:

$$z = (a, b)$$

La forma cartesiana és especialment útil per sumar complexos:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1, b_1) \pm (a_2, b_2) = (a_1 \pm a_2, b_1 \pm b_2)$$



Forma Polar

Un nombre complex $z = a + bi$ s'escriu:

$$z = re^{i\varphi}$$

on r és el **mòdul** de z i φ el seu **argument** i es calculen amb les transformacions de coordenades habituals

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}\ ;\ \varphi = \arctan\left(b/a\right)$$

Aritmètica entre Nombres Complexos

Multiplicació i Divisió

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenciació i Radicació

$$z^n = \left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$$

$$\sqrt[n]{z} = \left(re^{i\varphi}\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 360k}{n}}\ ;\ k = 0, \ldots, n-1$$

Relacions Importants

Sovint, per resoldre potències de nombres complexos és útil recórrer a algunes relacions especials entre els nombres imaginaris i les funcions trigonomètriques i expo-logarítmiques

- **Fòrmula d'Euler**: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi \implies z = re^{i\varphi} = r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) \cdot i$
- **Fòrmula de De'Moivre**: $\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$
- **Fòrmula Logarítmica**: $\log(z) = \log|z| + i \cdot \arg(z) \Longleftarrow \log(z) = \log\left(re^{i\varphi}\right) = \log r + i\varphi$

Curiositats

$$e^{i\pi} = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 \implies \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

$$i^i = e^{\ln i^i} = e^{i\ln i} = e^{i(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{i(0 + i\pi/2)} = e^{i^2\pi/2} = e^{-\pi/2} \implies \boxed{i^i = 1/\sqrt{e^{\pi}}}$$

NOMBRES COMPLEXOS

ARITMETICA

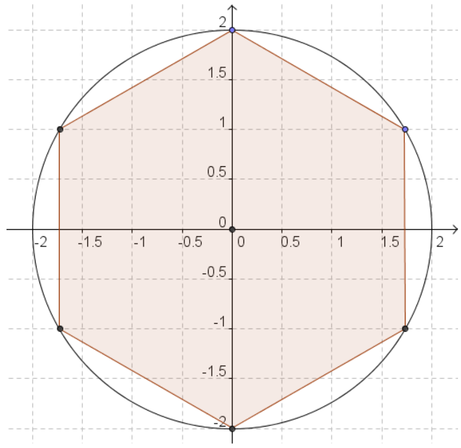
Exemple de radicació i com trobar les n arrels d'un polinomi d'ordre n

$$z^6+64=0 \implies z^6=-64 \implies z=\sqrt[6]{-64}=\sqrt[6]{64e^{i180}}$$

$$=\left(64e^{i\pi}\right)^{1/6}=\sqrt[6]{64}e^{i\frac{\pi}{6}}=2e^{i\frac{\pi+2\pi k}{6}}$$

$$\begin{aligned}
k=0 &\rightarrow z_1=2e^{i\pi/6}=2\cos\left(\tfrac{\pi}{6}\right)+2\sin\left(\tfrac{\pi}{6}\right)i\\
k=1 &\rightarrow z_2=2e^{i\pi/2}=2\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)i\\
k=2 &\rightarrow z_3=2e^{i5\pi/6}=2\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)+2\sin\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)i\\
k=3 &\rightarrow z_4=2e^{i7\pi/6}=2\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)+2\sin\left(\tfrac{7\pi}{6}\right)i\\
k=4 &\rightarrow z_5=2e^{i3\pi/2}=2\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)+2\sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right)i\\
k=5 &\rightarrow z_6=2e^{i11\pi/6}=2\left(\tfrac{11\pi}{6}\right)+2\sin\left(\tfrac{11\pi}{6}\right)i
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccc} z_1=\sqrt{3}+i & z_2=2i & z_3=-\sqrt{3}+i \\ z_4=-\sqrt{3}-i & z_5=-2i & z_6=\sqrt{3}-i \end{array}}$$



Connexió entre els Nombres Complexos i la Teoria de Fractals

El descobriment dels nombres complexos ha nodrit importants avenços en múltiples àrees científiques. La seva estreta relació amb les funcions trigonomètriques i la seva potència algebraica són avui dia indispensables en camps de la Física com l'electrònica, les tele-comunicacions, la física quàntica, etc. En Matemàtiques ocupen un eix vertebral en totes les seves disciplines i en una d'elles han servit per revolucionar tots els paradigmes establerts fins ara. Parlem de la Geometria Fractal que deu el seu neixement a l'estudi del pla complex.

CONJUNT DE MANDELBROT

El Conjunt de Mandelbrot $\mathscr{M}$ es construeix amb la següent successió definida sobre $\mathbb{C}$

$$(z_o=0)\longmapsto z_{n+1}=z_n^2+c\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}\neq\infty \implies c\in\mathscr{M}\\ \lim\limits_{n\to\infty} z_{n+1}=\infty \implies c\notin\mathscr{M}\end{cases}$$

La representació gràfica del conjunt de Mandelbrot $\mathscr{M}$ va produir les primeres figures fractals: