CÀLCUL VECTORIAL

μφ APENDIX

Conceptualització

El **Càlcul Vectorial** és la branca matemàtica relacionada amb la diferenciació i la integració de camps vectorials, així com la diferenciació parcial i la integració múltiple. El càlcul vectorial juga un paper essencial en la geometria diferencial i en l'estudi de les equacions diferencials. S'utilitza extensivament en física i en qualsevol enginyeria, especialment en la descripció dels camps electromagnètics, camps gravitatoris i en dinàmica de fluids.
El càlcul vectorial es va desenvolupar a partir de l'anàlisi establert per J. Willard Gibbs i Oliver Heaviside a les acaballes del segle XIX especialment per a espais tridimensionals. Tot i així, el seu tractament posterior n'ha permès generalitzar els resultats per a espais de dimensió arbitrària.

Definicions Bàsiques i Àlgebra en l'Espai Vectorial

Els objectes d'estudi del càlcul vectorial són per una banda els **vectors** i **escalars** i per l'altra banda els **camps**, funcions que prenen com a argument aquells vectors. Distingim entre dos tipus de camps:

– **Camps Escalars**: Una funció $\varphi(\vec{r})$ que pren com a argument vectors però retorna escalars com a resultat

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \vec{r} & \longmapsto & \lambda = \varphi(\vec{r}) \end{array}$$

– **Camps Vectorials**: Una funció $\vec{\Gamma}(\vec{r})$ que pren com a argument vectors i que retorna vectors com a resultat

$$\begin{array}{rccc} \Gamma: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \vec{r} & \longmapsto & \vec{v} = \vec{\Gamma}(\vec{r}) \end{array}$$

De manera similar a com hem vist en la fitxa d'Àlgebra Vectorial, entre els camps definits en un espai vectorial es poden definir vàries operacions algebraiques:

– del **Producte d'un camp escalar per un camp vectorial** en resulta un camp vectorial $\varphi\vec{\Gamma}$

– de l'**Addició de dos camps vectorials** en resulta un camp vectorial $\vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2$

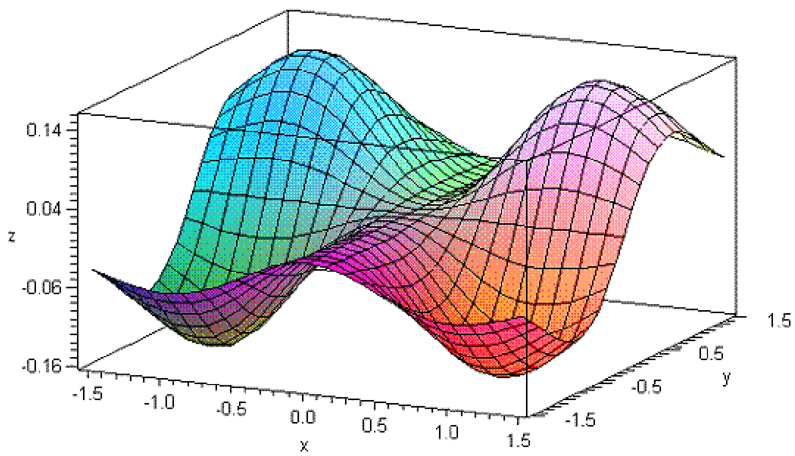
– del **Producte escalar de dos camps vectorials** en resulta un camp escalar $\vec{\Gamma}_1 \cdot \vec{\Gamma}_2$

– del **Producte vectorial de dos camps vectorials** en resulta un camp vectorial $\vec{\Gamma}_1 \times \vec{\Gamma}_2$

– del **Producte mixt de tres camps vectorials** en resulta un camp escalar $\vec{\Gamma}_1 \cdot \left(\vec{\Gamma}_2 \times \vec{\Gamma}_3\right)$

– del **Producte vectorial triple de tres camps vectorials** en resulta un camp vectorial $\vec{\Gamma}_1 \times \left(\vec{\Gamma}_2 \times \vec{\Gamma}_3\right)$

L'Operador Nabla



Per tot camp escalar o vectorial es pot calcular la seva variació al llarg de l'espai de la mateixa manera que per funcions reals de variable real la operació de derivació mesura el creixement o decreixement de la funció. Quan tractem camps vectorials que s'extenen en més d'una dimensió, cada dimensió es diferencia independentment doncs la funció pot presentar una evolució diferent al llarg dels diferents eixos de l'espai. Per englobar aquesta definició generalitzada de derivació s'utilitza l'**operador nabla de diferenciació parcial**:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

CÀLCUL VECTORIAL

μφ APENDIX

Operacions Diferencials amb l'Operador Nabla

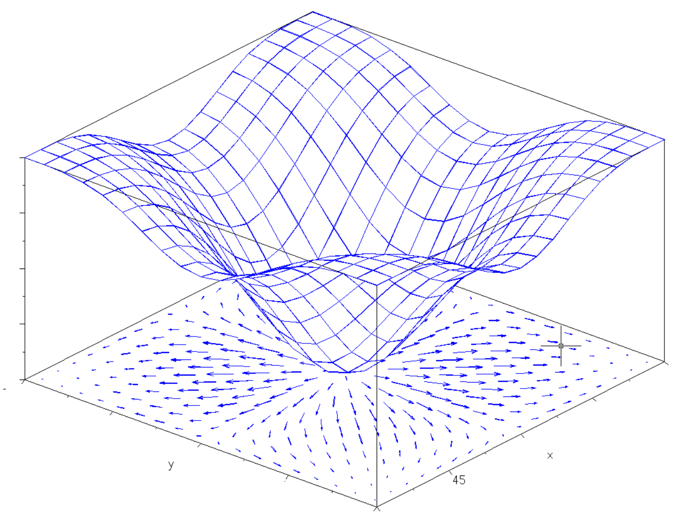
Operació	**Expressió**	**Rang**	**Forma Expandida**
GRADENT	$\vec{\nabla}\varphi$	Camp Escalar $\mapsto$ Camp Vectorial	$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$
ROTACIONAL	$\vec{\nabla}\times\vec{\Gamma}$	Camp Vectorial $\mapsto$ Camp Vectorial	$\left(\frac{\partial\Gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial\Gamma_y}{\partial z}, \frac{\partial\Gamma_x}{\partial z} - \frac{\partial\Gamma_z}{\partial x}, \frac{\partial\Gamma_y}{\partial x} - \frac{\partial\Gamma_x}{\partial y}\right)$
DIVERGÈNCIA	$\vec{\nabla}\cdot\vec{\Gamma}$	Camp Vectorial $\mapsto$ Camp Escalar	$\frac{\partial\Gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial\Gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial\Gamma_z}{\partial z}$
LAPLACIÀ	$\nabla^2\varphi$	Camp Escalar $\mapsto$ Camp Escalar	$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$

- El **Gradent** d'un camp escalar és un camp vectorial que apunta en la direcció de la major taxa d'increment del camp escalar i que té la magnitud precisament d'aquesta taxa de creixement

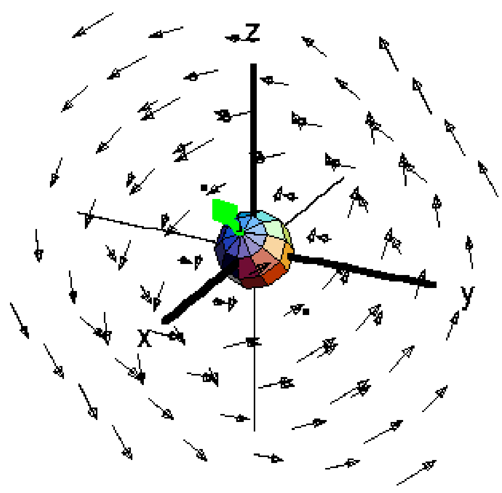
- El **Rotacional** és un operador vectorial que descriu la rotació infinitesimal d'un camp de vectors. En cada punt del camp, el rotacional es representa per un vector la longitud i direcció del qual caracteritzen la rotació en aquest punt. La direcció del rotacional és l'eix de rotació, amb el sentit del vector establert per la regla del tirabuixó, i la magnitud del vector és la magnitud de la rotació. Geomètricament es pot pensar la operació rotacional de manera que si el camp de vectors representa la velocitat de flux d'un fluid en moviment, llavors el rotacional és la densitat de la circulació del fluid

- La **Divergència** és l'operador vectorial que mesura la magnitud de l'aparició o desaparició de vectors. Més tècnicament, la divergència representa la densitat de volum del flux cap a l'exterior d'un camp vectorial a partir d'un volum infinitesimal al voltant d'un punt donat. Es pot entendre aquest concepte amb un exemple físic: considerem aire a mesura que s'escalfa o refreda. El camp vectorial rellevant per a aquest exemple és la velocitat de l'aire que es mou en un punt. Si l'aire s'escalfa en una regió s'expandirà en totes les direccions de manera que el camp vectorial de velocitats apuntarà cap a l'exterior d'aquesta regió. La divergència del camp de velocitats en aquesta regió tindria un valor positiu i direm que la regió és una font. Si l'aire es refreda i es contrau, el camp vectorial de velocitats apuntarà cap a l'interior d'aquesta regió, la divergència serà negativa i direm que la regió és un embornal

- El **Laplacià** d'un camp escalar és la divergència del gradent del camp i naturalment, ja que involucra segones derivades del camp, ens dóna una idea de la curvatura d'aquest camp



Gradent



Rotacional

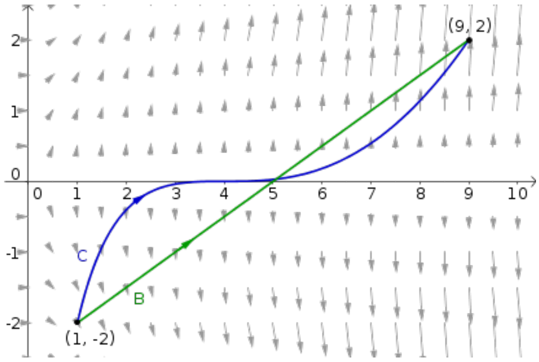
CÀLCUL VECTORIAL

APENDIX

Teorema del Gradent

Sigui φ un camp escalar que s'exten per l'espai.
Sigui τ una certa trajectòria que conecta dos punts de l'espai definits per les posicions $\vec{r}_a$ i $\vec{r}_b$.
Aleshores, el <u>TEOREMA DEL GRADENT</u> estableix que:

$$\int_{\tau} \vec{\nabla}\varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_b) - \varphi(\vec{r}_a)$$

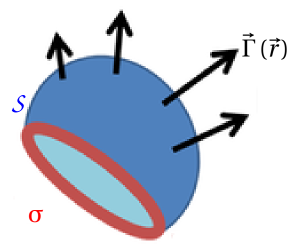


La integral de línia del gradent d'un camp escalar al llag de la trajectòria τ equival a la diferència del camp escalar avaluat en els extrems de la trajectòria.
Com a conseqüència (important en física) veiem que aquesta integral de camí resulta ser independent de la trajectòria escollida, tant se val si τ va en línia recta des de $\vec{r}_a$ fins a $\vec{r}_b$ o si fa milers de voltes i filigranes, el resultat acaba essent el mateix, només importen els valors del camp escalar en els punts inicial i final de la trajectòria.

Teorema de Stokes (Teorema del Rotacional)

Sigui $\vec{\Gamma}$ un camp vectorial que s'exten per l'espai.
Sigui $\mathcal{S}$ una certa superfície flotant en l'espai i σ la frontera d'aquesta superfície, una vorera unidimensional que ressegueix el contorn de la superfície.
Aleshores, el <u>TEOREMA DE STOKES</u> estableix que:

$$\iint_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{\Gamma}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\sigma} \vec{\Gamma} \cdot d\vec{r}$$

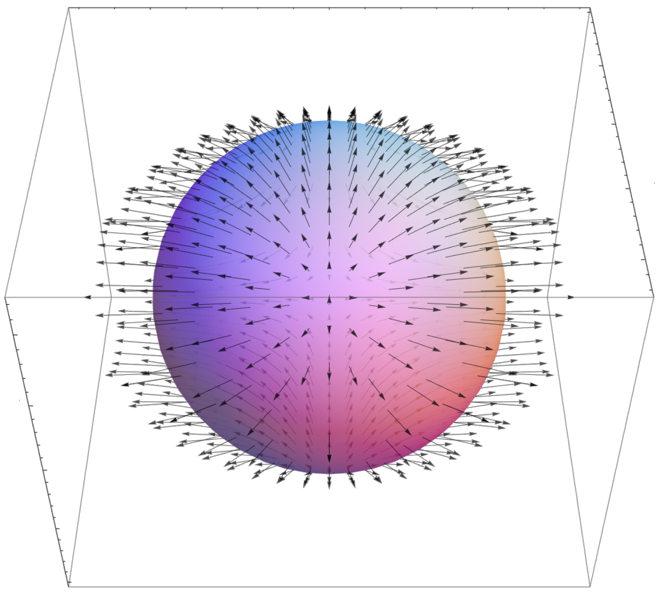


La integral del rotacional d'un camp vectorial sobre una certa superfície equival a la integral de linea del camp al llarg de la trajectòria tancada que defineix la superfície.

Teorema de la Divergència (Teorema de Gauss)

Sigui $\vec{\Gamma}$ un camp vectorial que s'exten per l'espai.
Sigui $\mathcal{V}$ un cert volum confinat en l'espai i Ω la frontera d'aquest volum, una pell bidimensional que envolta aquest volum.
El <u>TEOREMA DE LA DIVERGÈNCIA</u> estableix que:

$$\iiint_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma} \, dV = \oiint_{\Omega} \vec{\Gamma} \cdot d\vec{\Omega}$$



La integral de la divergència d'un camp vectorial escombrant un cert volum sòlid equival a la integral del flux d'aquet camp a través de la superfície tancada que encapsula aquest volum.
Aquest teorema és usat extensivament en física per a calcular el camp gravitatori o el camp electromagnètic generat per distribucions contínues de massa o càrrega. El truc usat en aquest marc és definir un volum que englobi la nostra font de camp i que tingui una geometria adient per simplificar el càlcul integral i aprofitar el teorema de la divergència per trobar la dependència funcional del camp amb la distància i els paràmetres físics del problema. Amb aquesta tècnica es pot calcular fàcilment el camp gravitatori a l'interior d'estrelles o planetes i el camp elèctric generat per fils de corrent, plaques d'un condensador, condensadors cilíndrics concèntrics i una llarga llista de configuracions de dispositius electrònics...